ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 9 JANVIER 1922.

PRÉSIDENCE DE M. ÉMILE BERTIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **Émile Picard**, en déposant sur le bureau les *Comptes rendus des séances de la sixième Conférence générale des Poids et Mesures*, s'exprime comme il suit :

Je présente ce Volume rendant compte des travaux de la sixième Conférence générale des Poids et Mesures. Déjà, dans la séance de l'Académie, du 3 octobre dernier, en publiant le discours d'ouverture que j'ai prononcé comme président de la Conférence, j'ai fait connaître le programme des travaux de celle-ci. Toutes les mesures proposées ont été adoptées, et la réunion du mois de septembre marquera une date dans l'histoire du Bureau international des Poids et Mesures. L'extension graduelle des attributions du Bureau est un fait d'une haute importance; elle commencera par l'étude des unités électriques.

La première séance de la Conférence s'est tenue à Paris au Ministère des Affaires étrangères; les autres séances ont eu lieu au Pavillon de Breteuil, à Sèvres.

M. **Émile Picard** présente en ces termes une brochure intitulée : *Le Principe de relativité et ses applications à l'Astronomie* :

Dans la séance du 24 octobre dernier, j'ai eu l'occasion de faire allusion à un article sur la relativité, que j'avais écrit pour l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* de 1922. C'est un exemplaire de cette petite brochure que je dépose sur le bureau. On y trouvera un exposé très succinct de la théorie présentée en vue de ses applications à l'Astronomie, d'un caractère plutôt

historique que critique. J'insiste cependant sur quelques points essentiels jouant un rôle important dans l'établissement de la théorie. L'un d'eux est la question capitale de la mesure du temps. Ne pouvant dire *a priori* ce que c'est que le temps, il faut se borner à le mesurer. Si l'on refuse d'entrer dans les vues d'Einstein sur le mode de mesure, et si l'on n'admet pas l'interprétation que donnent les relativistes de l'expérience de Michelson, la théorie manque de base.

Il m'est impossible pour le moment de prendre parti dans les discussions sur la relativité, qui, je crois, continueront encore longtemps. Les opinions à ce sujet peuvent dépendre grandement du point de vue où l'on se place, quant à l'objet des théories physiques. D'ailleurs aucune théorie ne semble donner actuellement d'explication entièrement satisfaisante de certains phénomènes électriques et optiques.

NOMOGRAPHIE. — *Sur la genèse et l'état actuel de la science des abaques.* Note de M. **Ch. Lallemand.**

Un grand nombre de problèmes pratiques, ressortissant aux sciences les plus diverses, réclament l'application répétée des mêmes formules et obligent ainsi à des calculs pénibles et sujets à erreurs. Pour simplifier ces calculs, les techniciens, pendant longtemps, n'ont eu à leur disposition que deux moyens : les *machines* (arithmomètres, intégromètres, planimètres, règles à calculs, etc.), solution souvent coûteuse et d'ailleurs fréquemment irréalisable, et, d'autre part, les *tables numériques*, de construction généralement longue et fastidieuse, mais surtout peu pratique lorsque le nombre des entrées dépasse deux. Un procédé nouveau et infiniment plus fécond, celui des *Tables graphiques* ou *Abaques*, donnant une représentation plane de relations entre plusieurs variables, a fait son apparition il y a un peu plus d'un siècle. Depuis 1795, date où Pouchet traçait des hyperboles d'égale cote sur une table de Pythagore, cette nouvelle science, grâce aux travaux de savants pour la plupart français, a réalisé d'énormes progrès, dont je me propose de donner une idée sommaire, en renvoyant pour les détails, au *Traité de Nomographie* (2e édition) de M. d'Ocagne, et au récent *Traité des Abaques* de M. R. Soreau (¹), le document le plus considérable et le plus complet publié sur la matière.

1. Jusqu'à 1884, à de très rares exceptions près, les abaques sont con-

(¹) Ouvrage en deux volumes (Étienne Chiron, éditeur), Paris, 1921.

stitués par un canevas de verticales et d'horizontales cotées, à travers lequel passe un faisceau de courbes, cotées elles aussi. Ce mode de représentation, qui rappelle celui d'une surface topographique par ses courbes de niveau, s'applique à toute relation entre 3 variables, si compliquée soit-elle. Dès 1843, en remplaçant, sous le nom de *coordonnées graduées*, les variables primitives par des fonctions auxiliaires, convenablement choisies, de celles-ci, Lalanne avait, pour quelques équations de type simple, réussi à transformer également en un groupe de lignes droites les courbes du troisième faisceau : il donna le nom d'*anamorphose géométrique* à cette transformation dont, 40 ans plus tard, un savant belge, Massau, devait, le premier, envisager la généralisation pour trois faisceaux de droites quelconques.

2. En 1884, M. d'Ocagne, faisant une très heureuse application des théories de Chasles sur les figures corrélatives et sur l'homographie, transforme, à son tour, en abaques à points alignés et à 3 échelles, les abaques à entre-croisement, à 3 faisceaux de droites; il donne, en outre, à l'ensemble, une disposition favorable à la précision. Mais, pas plus les uns que les autres, ces abaques ne traduisent encore des relations à plus de 3 variables.

3. En 1883, préoccupé de simplifier les calculs du Nivellement général de la France, j'avais, par l'emploi combiné de deux règles très simples, dites de l'*addition* et de la *multiplication graphiques*, réussi à créer, sous le nom d'*Abaques hexagonaux*, la première *méthode générale de représentation graphique d'une équation à un nombre quelconque de variables* ([1]), satisfaisant à la seule condition de pouvoir, directement, ou après anamorphose, être séparées, par groupes de deux au plus, dans une somme de produits de fonctions, telle que

$$\Sigma f_1(x_1, y_1) f_2(x_2, y_2) f_3(x_3, y_3) \ldots = 0.$$

Chacun des groupes est représenté par une échelle dite *linéaire*, *binaire*, *ternaire*, *quaternaire*, etc., selon qu'il renferme 1, 2, 3, 4, ... variables.

L'échelle linéaire est une simple droite, divisée d'après le principe des coordonnées graduées. *L'échelle binaire*, dont l'idée première est due à M. E. Prévot, l'un de mes collaborateurs, présente, spontanément ou après *anamorphose graphique*, deux cours de lignes, droites autant que possible, ayant pour cotes les valeurs des deux variables en cause. En combinant, par voie de multiplication graphique, une échelle linéaire avec une

([1]) La brochure contenant l'exposé de la méthode n'a paru qu'en 1885.

échelle binaire, on obtient une *échelle ternaire* ([1]). En associant de même deux échelles binaires, on a une *échelle quaternaire*, etc. Toutes ces échelles sont orientées parallèlement aux diamètres d'un hexagone régulier. Pour consulter l'abaque, on emploie un *indicateur* hexagonal, mobile et transparent, dont les trois diamètres gravés, dits *index*, sont disposés normalement aux échelles. L'indicateur restant ainsi orienté, on le fait glisser de manière à amener successivement sous les index toutes les données du problème. Le résultat se lit sur la dernière échelle, à sa rencontre avec l'index correspondant.

Ces règles générales comportent des variantes adaptées à certains cas particuliers. Ainsi, parfois, on accole simplement l'une à l'autre deux échelles binaires, ou bien l'on remplace une échelle binaire fixe par une échelle linéaire, graduée suivant les valeurs de l'une des variables et successivement orientée d'après les valeurs de la seconde ([2]).

D'autres fois, la formule à traduire s'accroît, dans certains cas, d'un terme supplémentaire; on le représente alors par une échelle additionnelle ([3]), formée de bandes courbes cotées. La cote de la bande où tombe le centre de l'indicateur exprime, le cas échéant, la valeur correspondante de l'appoint.

D'autres fois encore, on élimine par voie graphique, des variables auxiliaires impossibles à faire disparaître algébriquement ([4]).

4. Postérieurement, M. d'Ocagne de son côté, par l'emploi, séparé ou combiné, des deux artifices suivants, a étendu à des formules à plus de trois variables l'application de sa méthode des points alignés.

Le premier de ces artifices, exposé en 1891, consiste à substituer à une échelle de points cotés un réseau de points à deux cotes, formé par deux faisceaux de courbes. Sauf dans le cas particulier dit des *points condensés*, la droite d'alignement passe à travers ce réseau, comme le fait un des index de l'indicateur dans un abaque hexagonal avec échelle binaire. Chose curieuse, le premier abaque de ce type est l'abaque à quatre variables que, d'après des considérations particulières et pour représenter la loi de l'écoulement

---

([1]) Comme spécimen, voir dans le *Traité* de M. Soreau (*op. cit.*, t. 2, p. 155, abaque 126) l'abaque hexagonal donnant, pour un navire, la déviation du compas.

([2]) Voir dans *Nivellement de haute précision* (2e édition) par Ch. Lallemand, p. 497 (Ch. Béranger, éditeur, Paris, 1912), un exemple d'abaque à *échelles pivotantes*.

([3]) Voir un exemple dans le *Traité* de M. d'Ocagne (1re édition, p. 281, fig. 126).

([4]) Comme exemple d'*élimination graphique*, voir dans *Nivellement*, etc., *op. cit.*, p. 406, l'abaque hexagonal de l'erreur de réfraction.

de l'eau dans les canaux ([1]), Ganguillet et Kutter ont construit, dès 1869, soit plus de 20 ans avant la naissance de la remarquable théorie due à M. d'Ocagne et dont il a fait, dans toutes les branches de la Science, des applications nombreuses et variées. Cette théorie a été, en outre, enrichie par lui de diverses notions, comme celles des *valeurs critiques* et des *points critiques*, auxquels M. Soreau a d'ailleurs substitué, pour l'ordre nomographique 3, la considération plus générale des *points nodaux*.

Le second procédé consiste à décomposer l'équation proposée en un système d'équations à trois variables, dont les abaques puissent s'accoler deux à deux, comme dans certains abaques hexagonaux. C'est aussi en combinant deux échelles binaires que M. Soreau a imaginé les points à trois cotes, dont son Traité donne, semble-t-il, le premier exemple ([2]).

Si la méthode des abaques hexagonaux permet de représenter des équations fort compliquées (comme celle déjà citée de la déviation du compas, impossible d'ailleurs à traduire plus simplement en points alignés), elle a parfois l'inconvénient (que peut, en ce même cas, ne pas présenter celle des points alignés) d'exiger l'introduction d'une même variable dans deux échelles distinctes. Tel est, par exemple, le cas pour la formule générale $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, représentable par un abaque à points alignés formé de deux échelles rectilignes a, A, et d'un réseau de points à deux cotes b et c, tandis qu'un abaque hexagonal eût nécessité deux échelles binaires en b et c.

5. L'un des procédés permettant de représenter graphiquement certaines équations à n variables consiste à les décomposer en équations à trois variables, qui constituent autant d'éléments fondamentaux. M. Soreau montre que les équations de la forme $F_{12} = G_{34}$ (où 1, 2, 3 et 4 désignent quatre variables z_1, z_2, z_3 et z_4) peuvent aussi jouer ce rôle et que, en diminuant le nombre des *lignes de pivot*, l'emploi d'abaques composants à double alignement parallèle simplifie heureusement la construction et l'architecture de l'assemblage : tel son abaque de la formule de Sarrau donnant la vitesse initiale d'un projectile ([3]). M. Soreau a également imaginé, pour les équations du type $\Sigma f_n = 0$ (n désignant une variable z_n), un autre type d'abaques, d'un principe très ingénieux, avec graduations placées, deux à deux, sur des

---

([1]) Voir dans le *Traité* de M. Soreau, *op. cit.*, p. 429, Abaque 99, la reproduction de cet abaque, légèrement transformé pour en diminuer l'encombrement.

([2]) Voir Tome 2, page 162, Abaque 127.

([3]) *Traité des Abaques*, t. 1, p. 388, Abaque 88.

circonférences concentriques, qui servent, en outre, de lignes de pivots; ceux-ci ne sortent ainsi jamais des limites de l'épure [1].

Pour les équations $E_{123} = 0$, susceptibles d'anamorphose, l'homographie et la corrélation sont simultanément synthétisées par la mise de la proposée sous la forme d'un déterminant de disjonction :

$$(1) \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} x. & y. & t. \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0. \end{array}$$

Étendant le bénéfice de cette propriété aux équations $F_{12} = G_{34}$, susceptibles d'être représentées par deux abaques à double alignement concourant sur une droite, M. Soreau donne une théorie générale basée sur la réduction de ces équations aux formes équivalentes

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x. & y. & y'. & z. \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 0 & h_1 \\ f_2 & g_2 & 0 & h_2 \\ f_3 & 0 & g_3 & h_3 \\ f_4 & 0 & g_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0; \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} x. & t. & z. & y. \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 0 & h_1 \\ f_2 & g_2 & 0 & h_2 \\ f_3 & g_3 & g_3 & h_3 \\ f_4 & g_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0. \end{array}$$

La première de ces formes (où les notations x, y, ... indiquent symboliquement les coordonnées définissant les échelles cotées) caractérise le double alignement concourant; la seconde, le double alignement parallèle.

6. Le problème analytique fondamental de la Nomographie est celui de l'anamorphose des équations $E_{123} = 0$, c'est-à-dire de leur réduction au déterminant (1) ci-dessus, ou à des formes équivalentes. Abordé par Lalanne pour quelques équations de types simples, ce problème est longtemps resté stationnaire. En 1871, de Saint-Robert a exposé une méthode pour réduire, quand cela est possible, une équation quelconque $E_{123} = 0$ à la forme : $f_1 + f_2 + f_3 = 0$.

La réduction à la forme *cartésienne* générale : $f_1 g_3 + f_2 + f_3 = 0$, n'a été réalisée que beaucoup plus tard : en 1884, par Massau, à l'aide de quatre intégrations; en 1886, par M. Lecornu, à l'aide de trois; depuis, M. Soreau a donné une solution par deux intégrations, et M. Gronwall une solution sans quadrature, mais par des substitutions pénibles.

Le cas général, consistant à mettre l'équation $E_{123} = 0$ sous la forme :

$$|f_n, g_n, h_n| = 0 \qquad (n = 1, 2, 3),$$

---

(1) A titre d'exemple, voir Abaque 90 (*Traité des Abaques*, t. 1, p. 393).

n'a été résolu qu'en 1912 par M. Gronwall, dont la savante méthode aboutit à des équations aux dérivées partielles très compliquées. L'exposé peut en être beaucoup simplifié grâce à l'important théorème qui suit, dû à M. Soreau : « Si l'on ne considère pas comme distinctes les anamorphoses donnant lieu à des abaques homographiques, une équation $E_{123} = 0$ ne peut admettre qu'une anamorphose, sauf dans le cas (résolu par de Saint-Robert) où elle en admet une infinité. »

7. En pratique, la solution du problème général de l'anamorphose se simplifie du fait que les variables sont ou peuvent être aisément séparées dans la presque totalité des équations de la Technique, lorsque celles-ci sont anamorphosables. La classification vraie de ces équations et de leurs abaques est basée sur l'*ordre nomographique réel*, notion lumineuse due à M. Soreau. Considérant l'équation

$$F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + H_{12} h_3 = 0 \tag{2}$$

qui contient deux fonctions de z_3, par exemple $\frac{f_3}{h_3}$ et $\frac{g_3}{h_3}$, M. Soreau dit qu'elle est d'ordre 2 en z_3, et que cet ordre est *apparent* ou *réel* suivant qu'elle est ou non réductible à la forme $\Phi_{12}\varphi_3 + \Psi_{12} = 0$, laquelle est dite d'ordre 1 en z_3. Il appelle *ordre nomographique* la somme des ordres en z_1, z_2 et z_3 : cet ordre n'est réel que si tous les ordres partiels le sont.

Pour anamorphoser l'équation (2), M. Clark [1], reprenant une méthode inaugurée par Massau, posait : $x = \frac{F_{12}}{H_{12}}$; $y = \frac{G_{12}}{H_{12}}$; puis il éliminait z_1 et z_2 entre ces équations. S'il obtenait deux équations de la forme : $xf_2 + yg_2 + h_2 = 0$; $xf_1 + yg_1 + h_1 = 0$; l'anamorphose (1) était réalisée. De cette règle, il avait cru pouvoir déduire le critérium suivant : « L'équation (2) est, ou non, anamorphosable par voie algébrique suivant que l'élimination donne, ou non, deux équations linéaires en x et y. » Par une analyse très fouillée, M. Soreau, précisant l'exacte portée du critérium, démontre qu'il n'est pas applicable dans deux cas : 1° lorsque l'ordre 2 en z_3 n'est qu'apparent; 2° lorsque la proposée devient anamorphosable par la règle de l'élimination, après qu'on y a incorporé un *facteur anamorphosant :* chose possible seulement quand il existe, entre f_3, g_3, h_3, une relation homogène du 2e, du 3e ou du 4e degré.

---

[1] On doit également à M. Clark la théorie générale des abaques coniques à points alignés, dont M. d'Ocagne, antérieurement et pour le cas particulier du fruit intérieur d'un mur de soutènement, avait donné un élégant exemple.

Considérons les équations où F_{12}, G_{12}, H_{12} sont des fonctions linéaires et homogènes, d'une part en f_1, g_1, h_1, d'autre part en f_2, g_2, h_2; elles sont, par suite, à variables séparées, d'ordre réel total, 3, 4, 5 ou 6. M. Soreau a établi la proposition suivante, précisant le lien étroit qui existe entre l'ordre réel des équations et leur représentation par abaques : « Toute équation d'ordre 3 comporte une infinité d'anamorphoses, algébriques et transcendantes. Toute équation d'ordre 4 en comporte une seule, qui est algébrique. Toute équation d'ordre 5 ou 6 ne comporte qu'exceptionnellement une anamorphose, et une seule, qui est algébrique. » Anamorphoses en nombre infini, anamorphose unique, ou exceptionnelle, telles sont donc les caractéristiques de l'ordre 3, de l'ordre 4 et des ordres 5 et 6. Ce beau théorème ruinait l'éventualité, jusqu'alors envisagée, de réussir par voie transcendante, comme pour l'ordre 3, l'anamorphose des équations, d'ordre 5 ou 6, rebelles à la règle de l'élimination : si cet ordre est réel, la proposée ne saurait alors être anamorphosée que dans le cas singulier où elle admet un facteur anamorphosant, lequel est algébrique.

Ce bref exposé suffit à montrer le rôle important qu'a pris la Nomographie parmi les sciences appliquées. L'heure est venue, semble-t-il, de lui donner, dans l'enseignement technique, la place légitime qu'elle mérite.

M. P. Appell fait hommage à l'Académie d'une brochure intitulée : *Comité international des Poids et Mesures. Procès-verbaux des séances. Session de* 1921.

M. Ch.-Ed. Guillaume fait hommage d'une brochure intitulée : *Les récents progrès du système métrique*. Rapport présenté à la sixième Conférence générale des Poids et Mesures.

M. Émile Schwoerer présente à l'Académie un travail sur la *détermination de l'équation séculaire de la Terre dans la théorie d'Arrhénius*. Il résulte de ses calculs, pour l'augmentation de la longitude Λ, le siècle étant pris pour unité,

$$\Lambda = 1'',2.10^{-4} n^2;$$

n est le nombre de siècles écoulés.

ÉLECTIONS.

Par la majorité absolue des suffrages, MM. **E. Roux**, **Th. Schlœsing**, **L. Maquenne**, **E. Leclainche**, **P. Viala**, **L. Lindet**, membres de la Section d'Économie rurale, sont désignés pour faire partie du Conseil d'administration de l'*Institut des recherches agronomiques* organisé par Décret du 26 décembre 1921.

CORRESPONDANCE.

M. **Raoul Bayeux** adresse un Rapport sur l'emploi qu'il a fait de la subvention accordée en 1916 sur le *Fonds Bonaparte*.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Jean Villey. *Physique élémentaire et théories modernes. Molécules et atomes. États d'équilibre et mouvements de la matière.*

2° J. Bougault et H. Hérissey. *Notice sur la vie et les travaux d'Émile Bourquelot* (21 juin 1851—26 janvier 1921).

3° J. Poirée. *Précis d'Arithmétique.*

4° Mme Phisalix. *Animaux venimeux et venins.* (Présenté par M. L. Bouvier.)

5° Poincet. *Turbines à vapeur.* (Présenté par M. L. Lecornu.)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe de fonctions croissantes.* Note de M. **Théodore Varopoulos**.

1. Envisageons une classe de fonctions $\mu(x)$ positives croissantes indéfiniment avec x, mais moins vite que x et considérons une fonction $\nu(x)$ décroissante quelconque et un nombre θ positif plus grand de l'unité.

Supposons que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de $x = x_0$, l'inégalité

$$\mu[x + \nu(x)] > \theta . \mu(x).$$

Nous posons

$$(1)\quad \begin{cases} x_0 + \nu(x_0) = x_1, \\ x_1 + \nu(x_1) = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{n-1} + \nu(x_{n-1}) = x_n; \end{cases}$$

alors nous aurons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} &\mu(x_1) > \theta\mu(x_0), \\ &\mu(x_2) > \theta\mu(x_1), \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ &\mu(x_n) > \theta\mu(x_{n-1}), \end{aligned}$$

et en multipliant

$$\mu(x_n) > \theta^n \mu(x_0),$$

et, puisque la fonction $\mu(x)$ croît moins vite que x, on en déduit

$$a x_n > \theta^n \mu(x_0),$$

a étant un certain nombre positif.

Les relations (1) nous donnent

$$x_n = x_0 + \nu(x_0) + \nu(x_1) + \ldots + \nu(x_{n-1}),$$

d'où

$$x_n < x_0 + n.\nu(x_0),$$

parce que la fonction $\nu(x)$ est décroissante.

Alors

$$a[x_0 + n.\nu(x_0)] > \theta^n \mu(x_0),$$

ce qui est impossible puisque le rapport

$$\theta^n \mu(x_0) : x_0 + n.\nu(x_0)$$

tend vers l'infini avec n.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Théorème. — *Pour toute fonction $\mu(x)$ croissant moins vite que x, nous aurons l'inégalité*

$$\mu[x + \nu(x)] < \theta.\mu(x),$$

vérifiée constamment à partir d'une valeur de x, θ étant un nombre supérieur de l'unité quelconque et $\nu(x)$ une fonction décroissante quelconque.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le produit de Laplace relatif à certains hypercylindres.* Note de M. **Pierre Humbert**, présentée par M. Appell.

On sait que, dans l'espace ordinaire, le produit de Laplace relatif à un cylindre ayant pour base une ellipse ou une hyperbole s'exprime au moyen de la fonction $ce_n(z)$ dite « de Mathieu » ou « du cylindre elliptique ». Cette fonction, solution périodique et paire de l'équation différentielle

$$y'' + (a + k^2 \cos^2 z)y = 0,$$

se réduit, pour $k = 0$, à $\cos nz$ et vérifie aussi l'équation intégrale homogène

$$(1) \qquad y(z) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos z \cos u} y(u)\, du.$$

Dans l'espace à quatre dimensions, nous pouvons considérer le changement de variables

$$x = a \sin u \sin v \cos\varphi, \qquad y = a \sin u \sin v \sin\varphi,$$
$$z = ai \cos u \cos v, \qquad t = t,$$

qui introduit des hypercylindres parallèles à l'axe des t, ayant pour base dans l'espace des xyz des hyperboloïdes (ou, avec une modification insignifiante des ellipsoïdes) de révolution. L'équation de Laplace $\Delta U = 0$ pourra être vérifiée par le produit

$$U = e^{kt} \cos\mu\varphi \sin^\mu u \sin^\mu v\, V(u, v),$$

la fonction V étant solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + (2\mu + 1)\cot u \frac{\partial V}{\partial u}$$
$$- (2\mu + 1)\cot v \frac{\partial V}{\partial v} + h^2 a^2 (\cos^2 u - \cos^2 v) V = 0.$$

a. Si l'on cherche à mettre V sous la forme du produit d'une fonction de u par une fonction de v, on sera amené à considérer des fonctions nouvelles satisfaisant à l'équation différentielle

$$y'' + 2v \cot z y' + (a + k^2 \cos^2 z)y = 0.$$

Les solutions périodiques et paires, que l'on pourrait appeler *fonctions*

de Mathieu d'ordre supérieur, se réduiront, pour $k=0$, au polynome de Gegenbauer $C_n^\nu(\cos z)$, et vérifieront l'équation intégrale

$$(3) \qquad y(z) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos z \cos u} \sin^{2\nu} u\, y(u)\, du.$$

b. Si l'on veut au contraire que V soit une véritable fonction de deux variables, on pourra la considérer comme un cas très particulier des fonctions $M(u, v)$ vérifiant le système

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial u^2} - \cot u \cot v \dfrac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v} + A \cot u \dfrac{\partial M}{\partial u} + B \cot v \dfrac{\partial M}{\partial v} + (C + k^2 \cos^2 u) M = 0, \\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial v^2} - \cot u \cot v \dfrac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v} + A' \cot v \dfrac{\partial M}{\partial v} + B' \cot u \dfrac{\partial M}{\partial u} + (C' + k^2 \cos^2 v) M = 0. \end{cases}$$

La propriété analogue aux équations intégrales (1) ou (3) est la suivante : une relation telle que

$$M(u, v) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(\cos u \cos \rho + \cos v \cos \sigma)} N(\rho, \sigma) \sin \rho \sin \sigma\, d\rho\, d\sigma$$

existe entre une solution $M(u, v)$, périodique et paire en u et v, du système (4) et une solution $N(\rho, \sigma)$, périodique en ρ, σ, du système

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 N}{\partial \rho^2} - \cot \rho \cot \sigma \dfrac{\partial^2 N}{\partial \rho\, \partial \sigma} + (3 - A) \cot \rho \dfrac{\partial N}{\partial \rho} - (1 - B) \cot \sigma \dfrac{\partial N}{\partial \sigma} \\ \qquad\qquad + (C + A + B - 2 + k^2 \cos^2 \rho) N = 0, \\ \dfrac{\partial^2 N}{\partial \sigma^2} - \cot \rho \cot \sigma \dfrac{\partial^2 N}{\partial \rho\, \partial \sigma} + (3 - A') \cot \sigma \dfrac{\partial N}{\partial \sigma} + (1 - B') \cot \rho \dfrac{\partial N}{\partial \rho} \\ \qquad\qquad + (C' + A' + B' - 2 + k^2 \cos^2 \sigma) N = 0. \end{cases}$$

Lorsque certaines relations existent entre les constantes A, B, ..., les équations (4) se réduisent pour $k=0$ aux équations d'une fonction hypergéométrique du type F_2. En particulier, m et n étant des entiers, si l'on prend $A=-n$, $B=m+1$, $A'=-m$, $B'=n+1$, et si, pour $k=0$, C et C' sont respectivement égaux à

$$(m+1)(m+n+1) \quad \text{et} \quad (n+1)(m+n+1),$$

le système (4) se réduit pour $k=0$ au système vérifié par les polynomes $\mho_{m,n}(\cos u, \cos v)$ d'Hermite, généralisation de la fonction $\cos nx$. Il existe alors des solutions périodiques de (4) se réduisant pour $k=0$ à $\mho_{m,n}(\cos u, \cos v)$; ce sont donc des généralisations très directes, à deux variables, de la fonction $ce_n(z)$, et on les pourrait appeler *fonctions de*

Mathieu à deux variables. Il est alors très intéressant de noter que, dans ce cas, le système (5) devient pour $k = 0$ identique à celui que vérifie le polynome associé $\mathfrak{P}_{m,n}(\cos\rho, \cos\sigma)$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un tableau normal relatif aux surfaces unilatérales*. Note de M. **Gustave Dumas**, présentée par M. Paul Appell.

Dans une première Note (¹) dont les résultats seront développés par M. Jules Chuard, les tableaux de Poincaré ont été introduits. Une Note (²) subséquente a fait usage de considérations qui s'y rattachent. Celle d'aujourd'hui doit conduire à un « *tableau normal* » permettant de caractériser, mieux que des « *formes normales* », les surfaces unilatérales au point de vue topologique.

Soit T une surface unilatérale fermée satisfaisant aux conditions que l'on sait de régularité. On peut, d'une manière trop sommaire, puisqu'il s'agirait encore de distinguer entre homologies avec ou sans division, faire une classification des contours fermés d'un seul tenant situés sur T. Ces contours peuvent être *simples* ou *composés* et lorsqu'on les parcourt dans leur totalité, être respectivement, ou 1° bilatéraux et homologues à zéro, ou 2° unilatéraux et homologues à zéro, ou encore 3° bilatéraux et non homologues à zéro, ou 4° unilatéraux et non homologues à zéro.

Les contours des deux premiers types « forment frontière » sur T.

Il n'en est pas de même de ceux qui rentrent dans les deux derniers et que l'on peut, à cause de cela, désigner respectivement sous les noms de *cycles de première et de deuxième espèce*.

Une surface de caractéristique égale à -1, le plan projectif par exemple, ne contient aucun cycle de première ou de deuxième espèce, mais contient, entre autres, des contours fermés appartenant au second type, l'homologie étant sans division.

T peut toujours être triangulée en une surface polyédrale Π susceptible, après les coupures nécessaires, d'être étalée sur un plan, de manière à y former un domaine simplement connexe D, elliptique si l'on veut, et décomposé à partir d'un point intérieur O en un nombre pair de triangles. Ce

(¹) G. Dumas et J. Chuard, *Sur les homologies de Poincaré* (*Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 1113).

(²) G. Dumas, *Sur les contours d'encadrement* (*Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1221; voir aussi p. 1627).

domaine D dont les faces et les arêtes sont supposées orientées par des indicatrices convenablement choisies, peut être considéré comme constituant en fait le polyèdre Π.

Soit Δ la caractéristique de Π, et $C_1, C_2, \ldots, C_\gamma$ les contours de ses γ faces. L'égalité

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\gamma} C_i = 2X$$

définit sur Π un contour 2X d'un seul tenant et composé d'un ou de plusieurs contours fermés simples, bilatéraux ou unilatéraux.

Ce contour donne lieu ainsi à une homologie sans division. Il peut appartenir aussi bien au premier qu'au deuxième des types signalés plus haut.

Soient, d'autre part, avec $\rho = \Delta + 1$, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\rho$, $\Delta + 1$ cycles de deuxième espèce, homologiquement indépendants, et composés chacun de deux arêtes passant par O. Leur existence peut être établie. Le contour bien déterminé

$$(2) \qquad 2E = 2X + \sum_{i=1}^{\rho} (\text{zéro})\Gamma_i = \sum_{i=1}^{\gamma} C_i$$

est un *contour d'encadrement* composé, d'un côté des seules arêtes entrant dans X parcourues chacune exactement deux fois dans le même sens et, de l'autre, des arêtes appartenant aux Γ_i parcourues chacune exactement une fois dans un sens et une fois dans le sens opposé.

Posons encore

$$(3) \qquad 2Y = -2X - \sum_{i=1}^{\rho} 2\Gamma_i.$$

Le *tableau normal* de T sera constitué au moyen du tableau B, faces-arêtes, de Poincaré, auquel on adjoindra $\Delta + 1$ colonnes relatives aux Γ_i et une colonne relative à 2Y. Ces colonnes supplémentaires ne contiendront que des zéros, des 2 et des —2, les éléments différents de zéro correspondant aux arêtes de Γ_i et à celles de 2Y.

La somme des éléments de chaque ligne sera nulle, car en tenant compte de (1) et (3), on a

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{\gamma} C_i + \sum_{i=1}^{\rho} 2\Gamma_i + 2Y = 0.$$

Si deux surfaces unilatérales ont même caractéristique Δ, leurs tableaux

normaux seront, pour ainsi dire, identiques et elles seront, en outre, à cause de (2) homéomorphes.

Au tableau normal, on pourra faire correspondre dans le plan différentes formes normales.

La forme normale de MM. Dehn et Heegaard [1] n'est pas plane. On la retrouverait en donnant aux arêtes du contour 2E, une largeur aussi petite que l'on veut, mais appréciable.

La formule (2), que 2E puisse parcourir ou non d'un seul trait, établit une correspondance univoque et réciproque *en général* entre T et une portion du plan en forme de « roue » dont O serait le centre et les arêtes des Γ_i les rayons. Cette correspondance mérite d'être étudiée. Rien cependant ne peut, à cause des orientations, remplacer le tableau normal.

On peut aussi attribuer à la « roue » plusieurs feuillets reliant ses diverses parties entre elles.

La formule (4) est susceptible d'une interprétation géométrique qui conduirait, sans doute, à la proposition de M. Alexander [2], d'après laquelle toute surface unilatérale fermée peut être ramenée à une surface plane limitée par $\Delta + 2$ cercles provenant de contours fermés unilatéraux (circles arising from one-sided cuts).

Comme enfin des contours d'encadrement, autres que 2E, existent sur T, il y aura, pour toute surface unilatérale, plusieurs tableaux normaux. Les surfaces bilatérales en admettent aussi. Ces divers tableaux, *mutatis mutandis*, pourront s'obtenir, de la même manière, après avoir étendu sur un plan l'ensemble des faces du polyèdre correspondant à la surface par triangulation.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions définies par des séries de fractions rationnelles.* Note de M. **Arnaud Denjoy**, transmise par M. Émile Borel.

M. Wolff a démontré dans une communication toute récente (19 décembre 1921) que, si une fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un contour C et sur ce contour, elle est identique, à l'intérieur de C, à la

(1) *Encyclopädie der math. Wissenschaften* (*Analysis situs*, t. 3_1, fasc. 1, p. 189).

(2) J.-W. Alexander, *Normal forms for one and twosided surfaces* [*Annals of Mathematics* (Princeton University), 2e série, t. 16, p. 161].

somme d'une série du type

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n},$$

où les A_n et les α_n sont indépendants de z, la série $|A_n|$ étant de plus *absolument convergente* et les points α_n, tous extérieurs à C, possédant pour ensemble dérivé la courbe C elle-même.

On peut encore préciser le résultat précédent. *Il est loisible de choisir les α_n indépendants de f, de manière que* $|A_n| < e^{-n^{\frac{1}{2} - \varepsilon_n}}$ $\left(\text{avec } \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0\right)$. Bien entendu, la série (1) ne comprendra pas les termes en nombre fini, correspondant aux α_n où f n'est pas holomorphe.

De plus, *la série et toutes les séries dérivées convergent absolument, en tout point distinct des α_n. La convergence a lieu uniformément à l'intérieur de* C **ET SUR** C, *respectivement vers $f(z)$, $f'(z)$, ...*

Enfin, si f est holomorphe à l'intérieur d'un contour C′ contenant C, et aussi sur C′, on peut encore choisir les α_n *indépendants de f, possédant pour ensemble dérivé la réunion de* C *et* C′, *et de façon que :* 1° $|A_n|$ *a la même limitation que ci-dessus*; 2° *la série* (1) *et toutes les séries dérivées convergent absolument et uniformément d'une part vers f et ses dérivées sur* C *et à l'intérieur de* C, *d'autre part vers* 0 *hors de* C′ *et sur* C′.

Indiquons par exemple la répartition des α_n. p étant un entier positif, négatif ou nul, soit C_p une courbe simple, située à l'intérieur de C′, et contenant à son intérieur C_{p+1} et C. En outre C_p tend vers C si p croît, et vers C′ si p décroît. Soit h un nombre de valeur quelconque comprise par exemple entre $\frac{1}{10}$ et 10. Supposons qu'il existe une suite de nombres positifs δ_p inférieurs à e^{-1}, et tels que, si z_p est quelconque sur C_p et z_q sur C_q $(p < q)$, la plus courte distance de z_p à C_q et celle de z_q à C_p soient égales à $h(\delta_p + \ldots + \delta_{q-1})$, la même formule valant pour $p = -\infty$ ou pour $q = +\infty$ si C_∞ est C et si $C_{-\infty}$ est C′. Enfin la longueur de C_p est hL.

Plaçons sur C_p, n_p points a_p tels que la distance de deux points a_p consécutifs soit égale au plus petit des deux nombres

$$-hab\,\delta_p \log^{-1}\delta_p \quad \text{et} \quad -hab\,\delta_{p-1}\log^{-1}\delta_{p-1},$$

a étant déterminé par les limites de variation de h, et b étant arbitraire, mais inférieur à 1, et, comme a, positif, indépendant de p, de C et de C′.

Les α_n ne sont autres que les a_p. On prendra, par exemple,

$$\delta_p^{-1} = kp \log^2 p,$$

k étant indépendant de p. La détermination des A_n se fait selon la règle donnée par M. Wolff.

Il suit de la seconde proposition qu'avec la même décroissance minima pour les $|A_n|$, *on peut, étant donnée une infinité de régions* ω_n *deux à deux distinctes et convenablement réparties, former une série* (1) *convergeant dans* ω_n *vers une fonction* $q_n f_n(z)$, q_n *étant indépendant de* z *et* f_n *étant donné avec* n *indifféremment. La convergence de la série et de toutes les séries dérivées est uniforme sur tous les* ω_n *et leurs contours.*

Ainsi la somme $f(z)$ de la série (1) n'est pas monogène, même si

$$|A_n| < e^{-\sqrt{n}.n^{-\varepsilon}},$$

ε étant positif et fixe.

Traçons un cercle $\gamma_n(\varepsilon)$ de centre α_n et de rayon $\frac{\varepsilon}{n\log^2 n}$. Sur une droite ne rencontrant aucun des cercles précédents, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la série (1) a son module maximum M_p limité par $\left(\frac{k}{\varepsilon}p^{3+\varepsilon_p}\right)^p$ ($\lim \varepsilon_p = 0$). Pour que, indépendamment de la répartition des α_n, la suite $\sqrt[p]{M_p}$ soit moins croissante que $\frac{k}{\varepsilon}p\log p$ ou $\frac{k}{\varepsilon}p\log p\log_2 p$, ... (voir ma Note du 19 décembre 1921 et celle de M. Borel en date du 27 décembre), la condition $|A_n| < e^{-e^n}$ ne suffit pas. Il faut atteindre la décroissance même, utilisée par M. Borel, où le dernier exposant n est remplacé par $n^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) ou par $n\log^{1+\alpha} n$, ... De ce point de vue, on ne trouve pas de vraisemblance à la possibilité d'étendre la théorie de la monogénéité de M. Borel, avec des coefficients A_n nettement moins décroissants.

Considérons une suite de fonctions $f(z), f_1(z), \ldots, f_p(z), \ldots$ définies sur un ensemble E formé par une double infinité de droites partout denses, respectivement parallèles à deux directions. (Ces droites peuvent être remplacées par un réseau de courbes analytiques.) Supposons que, en tout point ζ de E, $f_p(\zeta)$ soit la dérivée de $f_{p-1}(z)$ quand z tend vers ζ sans quitter un ensemble E(ζ) qui contient les deux droites de E se croisant en ζ et dont le complémentaire ne renferme aucune ligne continue aboutissant en ζ. Si enfin, sur toute droite D de E, on a $\sqrt[p]{|f_p(z)|} < \alpha_p^{-1}$, la série α_p étant divergente, *il sera impossible que f soit nul sur un arc continu quelconque sans être nul sur tout* E.

Ce résultat, où intervient la considération de toutes les dérivées de $f(z)$, somme de la série (1), n'exige aucune hypothèse sur la mesure du complémentaire de E. Au contraire, si l'on suppose : 1° que le complémentaire de E peut être enfermé dans une famille de cercles $g_n(\varepsilon)$ de rayons res-

pectifs $\varepsilon e^{-e^{n^2}}$; 2° qu'il en est de même du complémentaire de $E(\zeta)$, ε variant alors avec ζ et n, de façon que son rapport à la distance du centre de $g_n(\varepsilon)$ à ζ tende vers zéro quand n croît, *il suffit alors d'hypothèses sur l'existence et la limitation (en particulier la continuité) de f et de f_1 aux points ζ de* E, *pour pouvoir conclure à l'existence des dérivées f_p de tout ordre et à la monogénéité de f.*

C'est le résultat de M. Borel, reposant sur la considération d'ensembles exceptionnels de mesure « extrêmement nulle ».

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Surfaces et variétés de translation de Sophus Lie.* Note de M. **Bertrand Gambier**, présentée par M. Goursat.

1. Sophus Lie a déterminé dans l'espace à trois dimensions *toutes* les surfaces susceptibles de deux ou plusieurs modes de génération au titre de surfaces de translation; il a montré que son procédé *peut* se généraliser dans l'espace à plus de trois dimensions. Poincaré, Darboux ont apporté leur contribution au travail de Lie.

Le procédé de Sophus Lie, pour $n > 3$, ne donne pas toutes les surfaces de cette espèce.

2. Pour simplifier, si $M(x_1 \ldots x_n)$ et $M'(x'_1 \ldots x'_n)$ sont deux points de l'espace à n dimensions, leur résultant $(M + M')$ sera le point

$$(x_1 + x'_1 \ldots x_n + x'_n);$$

V^α et V^β étant deux variétés à α et β dimensions de cet espace, leur résultante $V^\alpha + V^\beta$ sera la variété à $\alpha + \beta$ dimensions obtenue en composant deux points quelconques de V^α et V^β, elle est de translation. On définira de même $V^\alpha + V^\beta + \ldots + V^\lambda$, où l'on suppose $\alpha + \beta + \ldots + \lambda \leq n - 1$; j'éviterai d'ailleurs de considérer $(V^\alpha + V^\beta) + V^\gamma + \ldots + V^\lambda$, où deux ou plusieurs composantes seraient remplacées par leur somme effectuée; chaque variété de translation est donc décomposée en composantes simples. En général la décomposition d'une variété de translation est unique. Sinon, et c'est là le problème de Lie, on a une égalité symbolique

$$(1) \qquad V_1^{\alpha_1} + V_2^{\alpha_2} + \ldots + V_p^{\alpha_p} = W_1^{\alpha'_1} + W_2^{\alpha'_2} + \ldots + W_{p'}^{\alpha'_{p'}}$$

étant bien entendu que chaque composante n'est plus de translation et que :

ou bien les composantes du premier membre ne se retrouvent pas toutes au second;

ou bien, si ce fait se produit et si $M_1, M_2, \ldots, M_p$ sont des points pris au hasard sur $V_1, \ldots, V_p$, il existe un autre système de points $M'_1, M'_2, \ldots, M'_p$ pris respectivement sur $V_1, \ldots, V_p$ donnant lieu au même point résultant que le premier système. Sophus Lie traite le problème en supposant tous les α égaux à l'unité.

3. Je considère, par exemple, la surface de Cayley, retrouvée par Sophus Lie, admettant ∞^1 modes de génération :

$$(2) \qquad x = t_1 + t_2, \qquad y = t_1^2 + t_2^2 + 2a, \qquad z = t_1^3 + t_2^3 + 3a(t_1 + t_2).$$

Si $f(t_3)$, $\varphi(t_3)$, $\psi(t_3)$, $\chi(t_3)$ sont quatre fonctions arbitraires de t_3, j'obtiens dans l'espace à quatre dimensions la surface

$$(3) \qquad X_1 = x + f(t_3), \qquad X_2 = y + \varphi(t_3), \qquad X_3 = z + \psi(t_3), \qquad X_4 = \chi(t_3),$$

qui admet, évidemment, ∞^1 modes de génération par composantes à une dimension.

Soient de même deux surfaces quelconques de Sophus Lie dans l'espace à trois dimensions, d'équation respective

$$\Theta(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Theta_1(x_4, x_5, x_6) = 0.$$

Les formules

$$(4) \qquad X_1 = x_1, \qquad X_2 = x_2, \qquad X_3 = x_3, \qquad X_4 = x_4, \qquad X_5 = x_5, \qquad X_6 = x_6$$

définissent dans l'espace à six dimensions une variété à quatre dimensions : si chaque surface Θ ou Θ_1 admet seulement deux modes de génération, cette variété à quatre dimensions admet exactement quatre modes de génération par composantes à une dimension; elle n'est pas cylindrique; elle n'est pas non plus contenue dans un plan à cinq dimensions; cette dernière propriété appartiendrait, au contraire, à toute variété à quatre dimensions de l'espace à six dimensions obtenue par le procédé de Lie. En composant la variété (4) avec une courbe arbitraire à une dimension, nous obtiendrions une surface à cinq dimensions de l'espace à six dimensions, admettant aussi quatre modes distincts de génération.

Il serait facile de classer les divers types obtenus par le procédé de cette Note qui revient, au fond, à une séparation des variables. Dans cette séparation on devra retrouver au moins un type canonique de Lie.

4. Dans l'espace à trois dimensions, il ne peut s'agir que de surfaces ordinaires engendrées par la translation d'une courbe ordinaire. Dans l'espace à quatre dimensions on peut considérer une surface à trois dimensions engendrée par la translation de trois courbes à un paramètre : c'est ce qui a

été fait au paragraphe précédent; on peut, par une seconde généralisation, considérer une composante à une dimension et une composante à deux dimensions. Voici un exemple très simple où ρ, φ, ψ désignent trois paramètres arbitraires; ρ, φ', ψ' trois nouveaux paramètres, le ρ étant commun aux deux groupes :

$$(5)\quad \begin{cases} X_1 = \cos\varphi - \rho\cos\psi = \rho\cos\psi' - \cos\varphi', \\ X_2 = \sin\varphi - \rho\sin\psi = \rho\sin\psi' - \sin\varphi', \\ X_3 = \quad \varphi - \quad \psi = \quad \psi' - \quad \varphi', \\ X_4 = \quad f(\rho) = f(\rho). \end{cases}$$

Les trois premières équations s'obtiennent en coupant deux cercles concentriques de rayon 1 et ρ par une même sécante, leur considération fournit dans l'espace à trois dimensions l'hélicoïde minimum. La variété $[\rho\cos\psi, \rho\sin\psi, \psi, f(\rho)]$ n'est pas de translation si $f(\rho)$ est une fonction quelconque de ρ; par exemple $f(\rho) = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ conduit à considérer la surface de l'espace ordinaire $(\rho\cos\psi, \rho\sin\psi, \sqrt{R^2 - \rho^2})$ qui est une sphère et par suite cette fonction donne bien une surface (X_1, X_3, X_3, X_4) à deux composantes indécomposables. Si l'on prend au contraire

$$f(\rho) = \mu \operatorname{arc\,cos} \frac{\rho}{2\lambda},$$

où λ, μ sont des constantes, on obtient une surface de translation à trois composantes, rentrant dans les types explicités par Lie.

Le procédé employé ici est susceptible de généralisations évidentes.

5. Bien que n'ayant pas explicité les diverses variétés que j'indique, l'illustre Sophus Lie semble bien avoir prévu leur existence, comme l'indiquerait cette phrase de sa Note [1] que je recopie :

« Les p équations fonctionnelles ($k = 1, 2, \ldots, p$)

$$A_{k,1}(t_1) + \ldots + A_{k,p-1}(t_{p-1}) = -A_{k,p}(t_p) - \ldots - A_{k,2p-2}(t_{2p-2})$$

sont satisfaites quand on demande que les arguments $t_1, t_2, \ldots, t_{2p-2}$ soient liés seulement par $p - 1$ équations, *dont chacune contienne au moins p arguments*, de la manière la plus générale par des expressions de la forme

$$A_{ki}(t) = \varphi_k(t),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p(x)$ désignant p intégrales de la première espèce et du genre p. »

Les types obtenus ici ne satisfont pas à la condition que j'ai soulignée.

---

(1) *Comptes rendus*, t. 114, 1892.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Observation d'une étoile anormale au photomètre hétérochrome de l'Observatoire de Paris.* Note de MM. **Charles Nordmann** et **Le Morvan.**

Au cours des observations systématiques que nous poursuivons au moyen du photomètre hétérochrome au petit équatorial coudé de l'Observatoire, nous avons été amenés à faire porter nos mesures sur l'étoile 13 Céphée (B. D. + 55°2644) qui présente des anomalies tout à fait singulières.

Cette étoile appartient au type spectral A (étoiles à hydrogène) d'après les déterminations de Harvard, mais d'autre part elle est indiquée comme ayant une coloration jaunâtre (couleur WG + dans le catalogue de Potsdam) alors que les étoiles appartenant à ce type spectral sont généralement assez blanches. Étant donnés l'incertitude et le caractère subjectif des appréciations des couleurs des étoiles, il nous a paru nécessaire de soumettre cette étoile à des mesures photométriques faites au travers des écrans colorés de notre appareil.

Les mesures ont été poursuivies pendant les nuits des 1er, 3, 4, 6 et 7 octobre 1921 dans des conditions atmosphériques favorables. On a employé comme étoiles de comparaison la Polaire et deux étoiles voisines de l'étoile considérée, l'une H.R. 8383 appartenant au type spectral Ma, l'autre H.R. 8375 appartenant au type spectral A, toutes deux voisines par leur position et par leur éclat de l'étoile considérée 13 Céphée, qui est indiquée dans le catalogue de Harvard comme ayant la grandeur 6,01.

Les résultats des nombreuses mesures faites sont indiqués dans le Tableau ci-dessous, où R, V et B indiquent respectivement, d'après l'ensemble des déterminations effectuées, la valeur, à une constante près, du logarithme de l'intensité des étoiles désignées, vues respectivement à travers les écrans rouge, vert et bleu (antérieurement définis) du photomètre hétérochrome.

Nom de l'étoile.	R.	V.	B.	B — R.	$\log\frac{R}{B}$ ramené à la Polaire.
8383 H. R.....	1,475	1,766	1,791	0,316	—0,370
13 Céphée.....	0,899	1,398	1,515	0,616	—0,670
8375 H. R.....	0,718	1,318	1,565	0,847	—0,898

D'autre part, les comparaisons faites avec la Polaire pendant les soirées

d'observation montrent que, si l'on adopte pour celle-ci la valeur

$$\log \frac{R}{B} = -0,844$$

que nous avons utilisée dans toutes nos publications antérieures, on obtient les valeurs ci-dessus de $\log \frac{R}{B}$ pour les étoiles considérées, valeurs qui sont ainsi comparables à celles que nous avons publiées antérieurement pour un certain nombre d'étoiles.

Des conséquences remarquables découlent de l'examen des nombres précédents. Celles-ci notamment :

1° Tout d'abord, si nous considérons les deux étoiles de comparaison utilisées 8383 H. R. et 8375 H. R., nous voyons que les répartitions de l'intensité dans leurs spectres (et les températures effectives qu'on en déduit) correspondent assez bien avec leur type spectral ainsi qu'il ressort de nos déterminations antérieures. Celles-ci nous ont, en effet, donné pour les étoiles du type A (voir nos mesures sur α Andromède, α Lyre, γ Lyre, ..., *C. R.*, *passim*) une valeur moyenne de $\log \frac{R}{B}$ voisine de $-0,940$ et qui est assez peu différente de la valeur $-0,898$ trouvée ci-dessus pour l'étoile 8375 H. R. qui appartient au type spectral A. Pareillement, nos déterminations antérieures nous ont donné, pour les étoiles du type Ma (voir nos mesures sur β Andromède, μ Gémeaux, η Gémeaux, ..., *C. R., passim*), une valeur moyenne voisine de $-0,395$ peu différente de la valeur $-0,370$ trouvée ci-dessus pour l'étoile 8383 H. R. qui appartient à ce type spectral.

2° L'étoile 13 Céphée présente au contraire dans son spectre, considéré au point de vue photométrique, une anomalie tout à fait singulière. La valeur de $\log \frac{R}{B}$ correspondant à cette étoile est supérieure à la valeur moyenne de $\log \frac{R}{B}$ correspondant à son type spectral, d'une quantité égale à 0,270 environ. Cela signifie que l'intensité des rayons de cette étoile vue à travers notre écran rouge est, proportionnellement à son intensité vue à travers notre écran bleu, tout près de deux fois plus grande que ne le comporte le type spectral de cette étoile.

3° Si nous exprimons ces rapports d'intensités dans le spectre sous la forme de « températures effectives », au moyen de la loi de Planck, nous voyons que la température effective de l'étoile 13 Céphée est d'environ 5130° absolus, c'est-à-dire nettement inférieure à celle du Soleil qui

est une étoile du type G, et inférieure aussi à celle de toutes les étoiles du type F, et d'un grand nombre des étoiles du type K que nous avons étudiées par la même méthode ([1]).

4° Quelle peut être la cause de cette anomalie, jusqu'ici sans précédent, qui fait qu'une étoile du type spectral A possède une intensité lumineuse répartie dans son spectre de telle manière que les rayons les plus réfrangibles y sont proportionnellement moins intenses que dans toutes les étoiles jusqu'ici étudiées, non seulement du type A, mais aussi des types F et G, et correspond à peu près à la répartition de l'intensité dans les spectres du type K, c'est-à-dire dans les étoiles à température effective et à température photosphérique relativement basse? Il est extrêmement probable que la raison de cette anomalie singulière doit être cherchée dans l'existence d'une atmosphère extrêmement et exceptionnellement absorbante qui entoure l'étoile considérée.

L'un de nous a montré en effet récemment ([2]) que l'absorption générale des atmosphères des étoiles décroît, en moyenne, lorsqu'on passe des étoiles solaires aux étoiles des types F, A et B de Harvard, mais qu'il y a des écarts individuels à cette règle. Nos observations de 13 Céphée semblent mettre en évidence un exemple tout à fait remarquable de ces écarts individuels. Toutes les recherches physiques et astrophysiques récentes tendent à établir que le type spectral d'une étoile ne permet de classer et de définir au point de vue thermique, au point de vue du rayonnement quantitatif, que la mince « couche renversante » où se produisent les raies du spectre et qui avoisine la photosphère. Selon que celle ci est enveloppée par ailleurs d'une atmosphère plus ou moins vaste et dense, les « températures effectives » des étoiles, définies par l'intensité de leur rayonnement global, pourront se classer entre elles dans un ordre un peu différent de l'ordre spectral.

C'est ce dont l'étoile 13 Céphée nous donne, ainsi qu'on vient de voir, un exemple curieux.

([1]) *Comptes rendus*, t. 149, 1909, p. 1038, et t. 173, 1921, p. 72.

([2]) C. Nordmann, *Sur les pouvoirs absorbants des atmosphères des étoiles, etc.* (*Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 392).

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — *Sur le massif de Poïana Ruska et la corrélation des cycles d'érosion des Carpates méridionales.* Note de M. **Emmanuel de Martonne**, présentée par M. Pierre Termier.

Les explorations qui m'ont permis, l'été dernier, de retrouver les trois plates-formes des Alpes de Transylvanie dans le massif du Bihar et dans les monts métallifères du Banat (¹) m'ont aussi conduit dans le massif de Poïana Ruska, dont l'étude permet le raccordement avec le Haut Massif banatique.

Entre le bassin de Hatzeg, à l'Est, et celui de Caran Sebes, à l'Ouest, la vallée du Mures au Nord et celle de la Bistra au Sud, Poïana Ruska est une masse de schistes cristallins, bordée de grès daniens au Sud et à l'Est, dont la structure nous est connue par de nombreuses notes du géologue hongrois Schafarzik. Le géographe Sawicki y a reconnu une pénéplaine bombée, dont il a fixé l'âge au Miocène (équivalent probable de ma plate-forme Riu Ses).

Vu de loin et d'un point élevé, ce massif offre en effet l'apparence d'une sorte de bouclier, et, sur la carte, l'uniformité d'altitude des crêtes est remarquable. Mais l'âge miocène de la pénéplaine est contredit par la présence de graviers alluviaux anciens, déjà signalés par Schafarzik, près de Delar, formant un dépôt assez continu entre 650ᵐ et 750ᵐ.

En réalité, on ne voit aucune plate-forme étendue comme dans le Bihar et le Haut Massif banatique, mais des crêtes montant très régulièrement de 600ᵐ sur la bordure orientale, à 1000ᵐ et 1100ᵐ, près du point culminant (P. Ruska, 1359ᵐ). Une étude attentive montre qu'on doit les rapporter à deux niveaux d'érosion : un niveau supérieur (plate-forme de Vadu Dobri), qui ne s'abaisse nulle part au-dessous de 650ᵐ à 700ᵐ, et un niveau inférieur (plate-forme de Delar) développé le long des vallées tributaires du Mures, particulièrement le long de la Cerna, à 100ᵐ et 200ᵐ en contre-bas.

C'est ce dernier niveau qui porte les cailloutis, probablement levantins. Il s'étale dans la région de Hunediora (Vajda Hunyad) à une altitude moyenne de 500ᵐ correspondant aux plus hautes buttes tertiaires situées au nord du bassin de Hatzeg, et à la plate-forme de Boitza signalée sur la rive

(¹) *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 1188 et 1384.

droite du Mures dans le massif du Bihar. Il s'agit donc d'un équivalent de la plate-forme de Govornitza des Alpes de Transylvanie.

Nous retrouvons ce niveau dans la principale vallée du versant sud, la Ruskitza, qui débouche dans le couloir de la Bistra. Cette remarquable coupure rectiligne, séparant le massif de Poïana Ruska du Haut Massif banatique, est un fossé tectonique, aligné dans le prolongement de la grande dislocation que j'ai montrée à la limite méridionale du bassin de Hatzeg (Thèse, 1907). La dénivellation est encore de 200^m à 300^m entre les crêtes témoins de la plate-forme Riu Ses sur les deux bords du fossé ; le bord méridional, le plus haut, est en continuité avec les crêtes où j'ai trouvé, au nord du Retiezat, le niveau Riu Ses tranché par la faille de Hatzeg.

Comme dans le couloir de Caran Sebes, les dépôts néogènes formés dans le fossé ont été plissés, puis nivelés par la plate-forme pliocène mordant sur le bord du massif ancien. Le col de la Porte de fer transylvaine est une légère encoche dans ce niveau.

Le raccord s'établit donc bien avec mes observations antérieures dans le Haut Massif banatique, et il est possible maintenant d'établir la corrélation des niveaux d'érosion dans l'ensemble des Carpates méridionales, y compris le Bihar et le Banat.

Après les charriages d'âge crétacé, une pénéplaine s'est développée (plate-forme Boresco), dont l'âge éocène est fixé dans le Bihar. On la trouve à plus de 2000^m dans les hauts massifs des Alpes de Transylvanie (Fogarash, Paringu, Retiezat, Godeanu). Elle atteint à peine 1800^m dans le Bihar, où on la voit plonger vers le Nord-Est pour disparaître sous les sédiments éocènes, en s'abaissant par flexure marginale ou faille, tandis que le bord occidental, relevé à 1700^m, est tranché le long d'une ligne Nord-Sud par le bassin de Beius-Vascau. Elle est affaissée et basculée dans les Monts métallifères du Banat où son altitude maximum est de 1400^m au Semenic. Des fractures l'ont disloquée, au début du Néogène, suivant des lignes Nord-Sud.

La plate-forme Riu Ses s'est développée au Miocène. Séparée de la plate-forme Boresco par 200^m en moyenne, elle est parfois plus en contre-bas (500^m), ou plus rapprochée (100^m), suivant l'importance des dislocations qui ont inauguré le cycle d'érosion au cours duquel elle a été formée. Sur le bord nord-est du massif du Bihar, elle passe au-dessus de la plate-forme éocène ennoyée en nivelant les côtes tertiaires de Cluj. Son altitude très élevée, en certains points des Alpes de Transylvanie (1500^m à 1600^m), indique bien un nouveau soulèvement, mais n'en mesure pas l'ampleur ; car il s'agit

des points les plus hauts d'un réseau de vallées mûres. Dans le massif du Bihar, les Monts métallifères du Banat et le massif de Poïana Ruska, la plate-forme plus étendue ressemble à une pénéplaine, dont les points les plus hauts atteignent rarement 1000^{m}, et qui plonge vers les bassins néogènes : vallée du Mures, bassin de Hatzeg, couloir de Caran Sebes. Le versant ouest des Monts métallifères du Banat est remarquable par un ennoyage de la plate-forme, comme la bordure méridionale des Carpates d'Olténie. Les fractures méridiennes déjà dessinées ont pris la forme de fossés tectoniques au moment où s'accentuait cet affaissement vers le bassin pannonique, particulièrement le couloir de Caran Sebes. En même temps s'est formé le fossé de la Bistra.

La plate-forme Gornovitza, d'âge pliocène, est remarquable par l'uniformité de son altitude, toujours voisine de 500^{m}. Elle ne s'abaisse à moins de 300^{m} que sur le bord occidental des Monts métallifères du Banat et n'approche de 1000^{m} qu'à l'origine de vallées de montagne. On pourrait expliquer le cycle d'érosion, qui a entaillé les vallées actuelles dans les formes rapportées à ce niveau, par le seul abaissement du niveau de base des lacs pliocènes.

PHYSIQUE. — *Le principe de relativité dans les diélectriques.* Note [1] de M. E. Carvallo, présentée par M. Daniel Berthelot.

1. La conclusion de mes deux Notes antérieures est celle-ci [2] :

Quand un corps est mobile dans le champ magnétique d'un inducteur supposé fixe, il est le siège d'une force électromotrice induite. Celle-ci a pour mesure le flux d'induction coupé dans l'unité de temps s'il s'agit d'un conducteur. C'est le même flux multiplié par $\lambda = \frac{K-1}{K}$ *si le corps mobile est un diélectrique de pouvoir inducteur* K *par rapport au vide* [3].

Grâce à cette force, la première équation vectorielle de l'électromagnétisme (celle qui est relative à la circulation de la force électrique) jouit de l'invariance de Galilée quand il s'agit des conducteurs. La propriété d'inva-

(1) Séance du 3 janvier 1921.

(2) *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 1155 et 1461.

(3) Pour la vérification expérimentale de cette loi, voir Wilson, *Proced. of Roy. Soc.*, t. 73, 1904, p. 490.

riance semble à première vue disparaître dans les diélectriques. En cela, les équations de l'électromagnétisme diffèrent de celles de la mécanique.

2. L'expérience nous avertit que la différence est plus apparente que réelle, puisqu'en dépit de leurs efforts, les physiciens ont abouti à cette conclusion qu'aucune expérience d'électro-optique, comme aucune expérience de mécanique faite à la surface de la Terre, n'est capable de manifester la translation de notre planète, si tout le matériel expérimental est rattaché au sol.

3. L'apparence trompeuse a pour cause une hypothèse sur les diélectriques. Celle-ci résulte d'idées préconçues inspirées par l'analogie. Pour le montrer, revenons aux diélectriques : La loi ci-dessus a, nous l'avons vu, pour conséquence que, dans l'expérience de Fizeau, la vitesse v du corps entraîne l'onde lumineuse avec la vitesse $\frac{K-1}{K}v$. Si le corps est l'air (K voisin de 1), l'influence de la vitesse v est insensible. Elle tend à devenir nulle à mesure que l'air raréfié se rapproche du vide. De là l'idée généralement admise que l'air joue seulement un rôle secondaire et perturbateur; que l'onde est propagée, non par l'air, mais par l'éther ; que ce corps supposé ne participe pas au mouvement de l'air. Hypothèse naturelle, séduisante et féconde par l'analogie qu'elle précise entre les ondes lumineuses et les ondes sonores; mais hypothèse dangereuse; car si l'on aperçoit de suite une analogie frappante, l'expérience révèle par contre une différence profonde dans la loi de relativité. Là se trouve l'origine de la contradiction qui existe entre la théorie et l'expérience de Michelson; car à l'éther fixe on attache ce postulat qu'il propage l'onde issue de la source inductrice toujours de la même façon, que la source soit fixe ou qu'elle soit mobile. Du postulat résulte la conséquence inéluctable que l'éther fixe peut servir à repérer le mouvement absolu de la Terre.

4. Que la pensée abandonne un moment l'image de l'éther fixe pour ne plus retenir que les faits observés sur la matière tangible, faits dominés par la loi de relativité de Galilée-Michelson, voici quelles sont les données positives de la science expérimentale.

A une source inductrice S, considérée comme fixe, est lié le système de référence $Oxyz$. La première des équations de l'électromagnétisme dans le vide est

$$(1) \qquad -\left(\frac{\partial}{\partial y}Z - \frac{\partial}{\partial z}Y\right) = a'$$

(a' dérivée de a par rapport au temps pour x constant). Passons à un nou-

veau système de référence $O_1 x_1 y_1 z_1$ parallèle au premier, mais animé par rapport à S d'une vitesse v_1 que (pour simplifier les écritures) je suppose parallèle à Ox. L'équation (1) devient

$$(2) \qquad -\left(\frac{\partial}{\partial y_1}Z - \frac{\partial}{\partial z_1}Y\right) = \frac{da}{dt} - v_1\frac{\partial a}{\partial x_1}$$

$\left(\frac{da}{dt}\right.$ dérivée pour x_1 constant$\left.\right)$. Un observateur du système $O_1 x_1 y_1 z_1$ voit la source S animée de la vitesse $v_0 = -v_1$. C'est v_0 qu'il doit introduire dans le dernier terme de l'équation (2). Celle-ci devient alors

$$(2)' \qquad -\left(\frac{\partial}{\partial y_1}Z - \frac{\partial}{\partial z_1}Y\right) = \frac{da}{dt} + v_0\frac{\partial a}{\partial x_1}.$$

De la méthode même que nous avons suivie, il résulte que l'équation (2)' est invariante quand on passe d'un système d'axes à un autre système animé par rapport au premier d'une vitesse de translation quelconque. J'entends par là qu'on arrive toujours à l'équation (2)', pourvu que la vitesse v_0 représente toujours la vitesse de la source par rapport au système de référence dans lequel on se trouve. Le fait est d'ailleurs facile à vérifier par un calcul tout pareil à celui qu'on vient d'exécuter.

En particulier, si l'on attache le système de référence à la source inductrice S, on retombe sur les équations qui conviennent au cas du repos, puisque la vitesse v_0 devient alors nulle.

Les mêmes considérations s'appliquent à la deuxième des équations vectorielles de l'électromagnétisme. On arrive ainsi à cette proposition :

Une onde issue d'une source inductrice mobile S se propage dans le vide comme si le vide (assimilé à un corps matériel) était entraîné dans le mouvement de translation de la source.

Pour mieux dire :

Une source animée d'une translation entraîne avec elle son train d'ondes électromagnétiques, comme un aimant emporte avec lui son champ magnétique dans les expériences de Faraday (spectres magnétiques, courants induits).

Si l'on admet cette loi qui semble bien impérieusement commandée par les faits, l'expérience de M. Michelson s'explique d'elle-même : aucune expérience d'électro-optique ne peut révéler la translation de l'ensemble des appareils. Quant à la remarquable expérience de M. Sagnac montrant que la rotation de l'appareil expérimental agit sur le phénomène lumineux, comme la rotation de la Terre agit sur le pendule de Foucault, il suffit de

reprendre le calcul de l'auteur [1]. La seule modification est que les vitesses envisagées sont augmentées de la vitesse v de la source. La circulation du vecteur v sur le contour fermé du rayon lumineux étant nulle, le résultat du calcul de M. Sagnac n'est pas changé.

L'harmonie de l'électro-optique avec la mécanique apparaît donc complète, sans qu'il soit nécessaire de bouleverser les fondements de notre connaissance d'après les idées de M. Einstein.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Dilatabilité du chrome et des alliages nickel-chrome dans un intervalle étendu de températures.* Note de M. **P. Chevenard**, présentée par M. H. Le Chatelier.

La loi de dilatation du chrome dans un grand intervalle de températures paraît encore inconnue [2]. Je me suis proposé d'effectuer cette détermination et, en même temps, de préciser l'influence d'une addition de chrome sur la dilatabilité du nickel.

Les expériences ont été effectuées à l'aide du dilatomètre différentiel [3] déjà présenté à l'Académie. Dans cet appareil, la barrette-échantillon est opposée à une barrette-étalon de Baros (alliage nickel-chrome à 10 pour 100 Cr, dont la loi de dilatation, déterminé avec grand soin par des méthode directes [4], et maintes fois vérifiée, peut être représentée entre 0° et 1000° par une formule parabolique. Grâce à la netteté des tracés fournis par le dilatomètre, on peut déterminer, avec une précision suffisante, la valeur de la dérivée en tous les points du diagramme enregistré; il est aisé, par suite, de tracer la courbe qui exprime la variation thermique du coefficient vrai du métal étudié.

Chrome. — J'ai utilisé un échantillon de chrome aluminothermique, relativement pur, préparé par M. Goldschmidt; ce métal renferme 98,3 pour 100 de chrome, les impuretés étant constituées principalement par de l'aluminium et du fer.

---

(1) Sagnac, *Journal de Physique*, mars 1914.

(2) Je n'ai trouvé aucune indication à ce sujet dans le *Recueil des Constantes* de la Société française de Physique, non plus que dans les quatre volumes actuellement publiés des *Tables annuelles internationales de Constantes et données numériques*.

(3) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 916.

(4) *Revue de Métallurgie*, t. 14, p. 617.

Entre 0° et 100°, la dilatation du chrome est exactement réversible, et le métal paraît dépourvu de toute singularité thermique. Le coefficient vrai, qui, à 0°, est égal à $6,8.10^{-6}$, augmente rapidement avec la température; mais la courbe qui traduit cette variation présente une légère concavité du côté des températures croissantes (*fig.* 1).

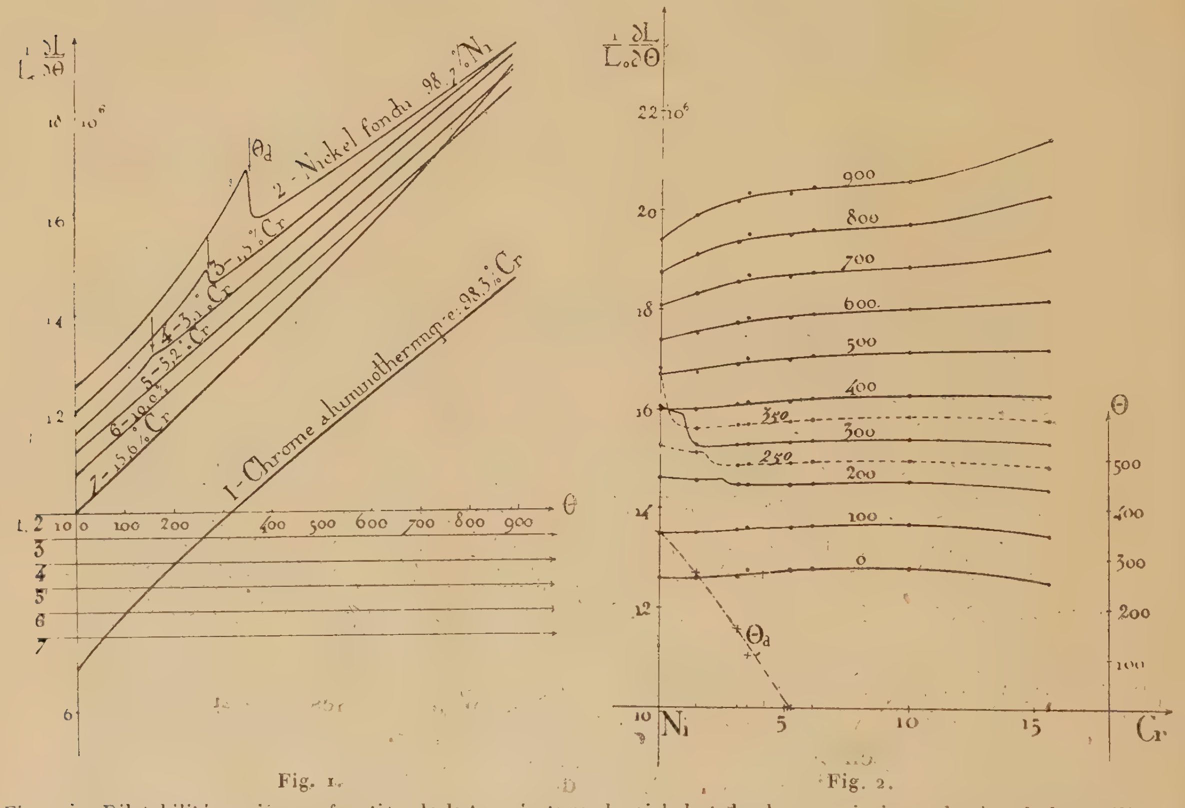


Fig. 1. — Dilatabilités vraies, en fonction de la température, du nickel et du chrome, ainsi que de cinq de leurs alliages. (Les courbes 1 et 2 sont rapportées à la graduation de l'axe des ordonnées; les autres ont été progressivement décalées, ainsi que l'indiquent les lignes supplémentaires des abscisses numérotées en accord avec les courbes.)

Fig. 2. — Dilatabilités vraies, en fonction de la teneur en chrome, des alliages Ni-Cr, considérés à diverses températures (ordonnées de gauche), et position du point de Curie (Θ_d) en fonction de la teneur en chrome (ordonnées de droite).

Alliages nickel-chrome. — Ces alliages, fondus au four électrique, à partir du nickel réduit et du chrome aluminothermique, sont sensiblement dépourvus de carbone ($C \leq 0,10$ pour 100); mais, pour assurer le forgeage, on a dû incorporer à la charge une proportion de manganèse rapidement croissante avec la teneur en chrome (0,5 à 0,8 de manganèse pour 5 pour 100 de chrome; 1,5 à 2,5 pour 100 de manganèse au delà de

15 pour 100 de chrome). Aussi, ai-je limité provisoirement cette étude aux alliages tenant 16 pour 100 de chrome, car ceux dont le titre est supérieur sont trop fortement manganésés pour être assimilables à des alliages binaires.

Les courbes dilatabilité-température pour le nickel, le chrome et leurs alliages, de 1,5 à 15,6 pour 100 de chrome, sont rassemblées dans la figure 1. La transformation magnétique du nickel est accompagnée, comme on sait, d'une diminution rapide de la dilatabilité vraie, et l'abscisse de point d'inflexion θ_d coïncide sensiblement avec la température du point de Curie déterminée par les méthodes thermomagnétiques; de part et d'autre du crochet, les deux tronçons de la courbe de dilatabilité ont des pentes moyennes très différentes.

Comme l'a montré M. L. Dumas [1], les alliages nickel-chrome sont réversibles, et leur point de Curie s'abaisse quand la teneur en chrome augmente, au point que les alliages de titre supérieur à 5 pour 100 sont amagnétiques à la température ordinaire.

En même temps, l'addition chromée amène une atténuation très rapide de l'anomalie de dilatation du nickel : le crochet disparaît progressivement, et les deux tronçons de la courbe tendent à se disposer dans le prolongement l'un de l'autre. Les alliages amagnétiques n'accusent plus de singularité thermique, et leur coefficient de dilatation vrai augmente régulièrement avec la température. La loi de cet accroissement est linéaire quand la teneur en chrome est comprise entre 5 et 10 pour 100, mais prend une allure parabolique pour les alliages plus riches en chrome.

Le réseau de la figure 2 résume l'ensemble des mesures; il représente, pour toute température comprise entre 0° et 900°, l'action du chrome sur la dilatation du nickel. Au-dessous de 400°, les isothermes présentent une singularité; l'abscisse de celle-ci correspond à l'alliage dont le point de Curie coïncide avec la température de l'isotherme considéré.

L'addition de chrome, beaucoup moins dilatable que le nickel, affecte peu la dilatabilité de ce métal à la température ordinaire, et tend à l'augmenter aux températures élevées; cet écart considérable par rapport à la règle des mélanges tient probablement à la présence du composé Ni^2Cr^3, dont l'existence paraît ressortir du diagramme de solidification établi par

---

[1] L. Dumas, *Recherches sur les aciers au nickel à hautes teneurs*, p. 150 (Ch. Dunod, éditeur, Paris, 1902).

Voss [1] et de mes recherches sur l'anomalie totale des ferronickels chromés [2].

CHIMIE ORGANIQUE. — *Composé organométallique mixte de l'aluminium.* Note de M. **Faillebin**, présentée par M. Haller.

L'aluminium se dissout dans un mélange anhydre d'iodure de méthylène et d'éther.

A un certain volume d'éther anhydre contenu dans un ballon dans lequel on a mis de la tournure d'aluminium grossièrement découpée au couteau, on ajoute un égal volume d'iodure de méthylène et une parcelle d'iode. On surmonte le ballon d'un appareil distillatoire et l'on commence à chauffer doucement au bain-marie de façon à amorcer la réaction. Une portion de l'éther distille, le liquide se trouble, se décolore, puis redevient limpide en même temps que l'aspect de l'ébullition se modifie. La réaction amorcée se continue d'elle-même. Le ballon est alors adapté à un bouchon portant un réfrigérant ascendant et un tube à brome par lequel on introduit de l'éther anhydre de façon à éviter un trop grand échauffement. Le réfrigérant peut être mis en relation avec un gazomètre de manière à recueillir puis mesurer les gaz qui peuvent se produire.

On peut formuler la réaction principale :

(1) $$3\,CH^2I^2 + 4\,Al = 3\,CH^2AlI + AlI^3,$$

celle-ci aurait lieu sans dégagement gazeux. Il y en a un cependant, d'autant plus grand d'ailleurs que la température est plus élevée ou la concentration de l'iodure de méthylène plus grande. Ce dégagement est dû à une réaction accessoire qui se produit également en l'absence d'éther et donne naissance à de l'éthylène.

Ce gaz est bien de l'éthylène : débarrassé de la vapeur d'éther par l'acide sulfurique, il fixe le brome, décolore le permanganate. Le bromure bout à 130°, fond vers 6°, a un poids moléculaire de 200 (cryoscopie acétique) et donne à l'analyse 83,6 pour 100 de brome. Ce sont à peu près les caractères du bromure d'éthylène.

La réaction accessoire est probablement :

(2) $$6\,CH^2I^2 + 4\,Al = 3\,C^2H^4 + 4\,AlI^3.$$

Les réactions (1) et (2) ont lieu aussi avec le bromure de méthylène, mais

(1) *Zeitsch. f. anorg. Chemie*, t. 96, p. 139.
(2) *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 594.

s'amorcent plus difficilement, et la réaction (2) est dans ce cas moins importante.

Dans des conditions analogues avec $\frac{1}{3}$ molécule CH^2I^2, on recueille environ un litre de gaz; avec $\frac{1}{3}$ molécule CH^2Br^2, 300^{cm^3} seulement.

La réaction (2) nécessite, pour un poids donné de bromure de méthylène, moins d'aluminium que la réaction (1). On constate que, pour une molécule de bromure de méthylène, il se dissout plus d'un atome d'aluminium et moins de $\frac{4}{3}$ d'atome, la concordance avec la formule (1) étant d'autant meilleure qu'on opère sur de plus grandes quantités; d'autre part il reste un peu de bromure de méthylène non employé. Pour l'iodure les proportions sont moins bien respectées à cause de la réaction (2).

Examinons le cas des solutions obtenues avec le bromure de méthylène.

La solution forme deux couches dont on peut interpréter l'existence en admettant la présence de deux corps : l'halogénure d'aluminium et l'organométallique. On sait que le bromure d'aluminium forme avec l'éther la combinaison $AlBr^3, C^4H^{10}O$, mais celle-ci est très soluble dans l'éther et son existence ne saurait expliquer la formation de deux couches. La partie la plus dense ne se laisse enlever par distillation que le dissolvant, même sous pression réduite; il y a ensuite décomposition. On peut penser que cette partie contient surtout l'halogénure combiné à l'éther.

La couche supérieure concentrée fournit à nouveau deux couches, une inférieure en petite quantité identique à la précédente, une supérieure qui ensuite reste homogène. On débarrasse celle-ci le plus possible de l'éther par chauffage modéré sous pression réduite. Le poids moléculaire de ce qui reste, mesuré par cryoscopie dans le benzène, est 372. Ce nombre est une limite inférieure pouvant être largement dépassé, car s'il reste seulement 5 pour 100 d'éther en poids, le chiffre précédent doit être augmenté du quart de sa valeur. Ce liquide est décomposé par la chaleur. En le distillant sous pression réduite, on recueille une faible quantité d'un liquide épais ne contenant plus de brome, renfermant de l'aluminium et un résidu hydrocarboné. Il reste dans le ballon un solide caverneux brun qui avec l'éther ne redonne plus le liquide primitif. Ces faits rapprochés de l'impossibilité d'amorcer la réaction dans un liquide autre que l'éther, par exemple le sulfure de carbone, conduisent à penser que l'organométallique doit contenir de l'éther et peut-être de l'halogénure d'aluminium combinés.

L'eau agit avec violence sur la solution initiale. Il y a dégagement de méthane en quantité proportionnelle au poids d'aluminium employé. Il

reste une solution aqueuse contenant de l'halogénure d'aluminium et de l'alumine; l'éther surnageant ne renferme qu'une faible quantité de bromure de méthylène. L'alcool absolu réagit avec la même énergie que l'eau; en général agissent également et de façon paraissant quantitative, les corps possédant des groupes hydroxyles dont la solution d'aluminium paraît le réactif. Il se fait du méthane. Notons que ni l'ammoniac ni l'aniline ne donnent naissance à un dégagement gazeux.

Parmi les dérivés halogénés, seuls les hydracides paraissent agir, assez doucement d'ailleurs; il y a formation de méthane et d'halogénure d'aluminium. On constate dans cette action que la couche inférieure augmente, ce qui confirme notre hypothèse sur la constitution de cette seconde couche.

Si la formule que nous avons adoptée pour le dérivé organométallique est exacte, elle renferme une double liaison; celle-ci doit être susceptible de réaction d'addition. En effet la solution d'aluminium fixe deux atomes d'iode par atome d'aluminium employé, déduction faite de ce qui a participé à la formation d'halogénure. Si l'on traite ensuite par l'eau, on n'a plus de dégagement gazeux. On sépare alors l'éther et on le distille après dessiccation. On n'a pu en séparer de l'iodure de méthyle pur, mais si l'on agite le distillat avec une solution d'azotate d'argent, on a un abondant précipité jaune d'iodure d'argent. Ce même distillat, après dessiccation sur le sodium, traité par le magnésium, fournit un dérivé de Grignard. Cela démontre qu'il s'est formé de l'iodure de méthyle suivant les réactions :

$$CH^3 : AlBr + I^2 = CH^2I . AlBrI,$$
$$CH^2I . AlBrI + H^2O = CH^3I + AlBrI(OH).$$

Il y a lieu de mentionner l'action de la solution d'aluminium comme agent de condensation : l'acétone fournit de l'oxyde de mésityle, et du méthane résultant de l'action de l'eau formée.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Détermination des acides gras par la formation de leurs complexes à base d'uranyle et de sodium.* Note de M. J. **Barlot** et Mlle M.-T. **Brenet**, présentée par M. G. Urbain.

Streng a signalé en 1883 (1) une méthode permettant de caractériser microchimiquement l'ion $\overset{+}{Na}$. Cette méthode repose sur la formation d'un

(1) Streng, *Ber. der oberhess. Ges. für Nat. und Heilkunde*, t. 22, 1883, et Haushofer, *Mikroskopische Reaktionen*, 1885, p. 132.

acétate double d'uranyle et de sodium, peu soluble, cristallisé en tétraèdres réguliers. Le réactif employé est généralement l'acétate d'uranyle en solution aqueuse acidifiée par l'acide acétique; l'ammonium, le potassium, le rubidium et le cæsium donnent aussi des acétates doubles, mais ce sont de longues aiguilles ou des prismes très solubles, appartenant au système quadratique.

La réaction de Streng présente de curieuses particularités; pour qu'elle se produise, il est nécessaire que des ions $\overset{+}{H}$ existent dans le liquide; c'est ainsi qu'une solution d'acétate de sodium sur laquelle on projette des cristaux d'acétate d'uranyle pur ne donne pas de cristaux d'acétate double après plusieurs jours de contact; par contre, le nitrate d'uranyle réagit immédiatement, à froid, sur la solution d'acétate de sodium, et l'on observe de grosses formes squelettiques tétraédriques, peu à peu remplacées par des cristaux complets; ces squelettes sont caractérisés par l'angle de 120°, ou plus exactement par la projection de l'angle des axes ternaires du cube dont le tétraèdre peut être dérivé.

Convenablement employée, la formation de ce sel double peut servir à rechercher le sodium, l'uranium ou l'acide acétique. Il était naturel d'essayer d'utiliser cette réaction pour la recherche des homologues de ce dernier; les essais faits dans cette voie ont donné de curieux résultats : tantô il se forme un sel double peu soluble, tantôt aucun précipité ne prend naissance, et, de l'ensemble des cas jusqu'à présent étudiés, nous dégageons la règle suivante :

« La réaction de Streng appliquée aux homologues de l'acide acétique donne des résultats positifs chaque fois que l'acide gras renferme dans sa chaîne un nombre pair d'atomes de carbone consécutifs. »

Les expériences ont été faites microchimiquement d'abord, puis sur des quantités plus considérables de substance, avec les divers sels de sodium des acides gras et le nitrate d'uranyle ou les sels d'uranyle correspondants, en solution acide; les résultats sont les suivants :

a. Formiate : rien.

b. Acétate : tétraèdres jaune verdâtre; l'analyse du corps obtenu donne comme formule :

$$CH^3CO^2Na, (CH^2CO^2)^2UO^2.$$

c. Propionate (monométhylacétate) : rien.

d. Butyrate normal : précipité cristallin immédiat, formé d'abord de cristaux très petits, se transformant peu à peu en grandes aiguilles dentelées. Formule :

$$C^3H^7CO^2Na, (C^3H^7CO^2)^2UO^2.$$

e. Isobutyrate (diméthylacétate) : rien.

f. Valérianate normal : rien.

g. Valérianate ordinaire (dérivant de l'alcool amylique de fermentation, le méthyl-3-butanol-1, $\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix} > CH - CH^2 - CO^2Na$) : précipité vert jaune formé de cristaux très petits. Formule :

$$C^4H^9CO^2Na, (C^4H^9CO^2)^2UO^2.$$

h. Caproate normal : précipité cristallin formé de pyramides quadrangulaires accolées par la base. Formule :

$$C^5H^{11}CO^2Na, (C^5H^{11}CO^2)^2UO^2.$$

i. Œnanthylate normal : rien.

L'ensemble des faits ci-dessus mentionnés paraît démontrer nettement l'influence du nombre d'atomes de carbone consécutifs dans une chaîne. Ceci est à rapprocher d'autres alternances connues, telles que celles mentionnées en 1877 par Baeyer [1], qui a montré que, dans les séries des acides gras mono- et bibasiques, un terme à nombre pair d'atomes de carbone a un point de fusion supérieur à celui de l'acide qui contient un carbone de plus.

Pour les acides dérivés de l'acide acétique par substitution d'un des atomes d'hydrogène du groupe CH^3, l'aptitude à donner des sels doubles peu solubles dépend de la nature du radical introduit. Les trois acides acétiques chlorés ne produisent pas de réaction; par contre, le phénylacétate de sodium, au contact du nitrate d'uranyle, donne immédiatement un précipité cristallin formé d'aiguilles groupées en oursins. Ce sel, reproduit en plus grande quantité et analysé, a pour formule

$$C^6H^5 - CH^2 - CO^2Na, \quad (C^6N^5 - CH^2 - CO^2)^2UO^2.$$

L'étude physico-chimique de ces différentes réactions, actuellement en cours, permettra de compléter les résultats ci-dessus, et aussi de savoir si les sels doubles, dérivés des acides gras à chaîne impaire d'atomes de carbone, peuvent exister en solution ou à l'état solide.

---

(1) Baeyer, *Berichte*, t. 10, 1877, p. 1286.

GÉOLOGIE. — *Sur une formation rédonienne (Miocène supérieur) ravinant les argiles éocènes, à minerai de fer, au sud de Rennes (Ille-et-Vilaine).* Note de MM. **Y. Milon** et **L. Dangeard**, présentée par M. Ch. Barrois.

Des fouilles reprises récemment pour la recherche du minerai de fer, aux abords des formations tertiaires de la Chaussairie (sud de Rennes), ont attiré notre attention sur les rapports stratigraphiques des dépôts ferrifères avec les couches tertiaires voisines (oligocène et miocène).

Jusqu'à présent ces rapports n'avaient pu être observés. S'appuyant sur la composition et le mode de gisement de ces minerais, M. Kerforne les a assimilés récemment [1] à ceux de la région de Châteaubriant, dont il a nettement établi *l'âge éocène*, et la position, sous des grès silicifiés, homologues des *grès à sabales*.

Dans ces deux régions, on recherche des rognons d'hématite associés à des argiles blanches ou ocracées.

Une fouille entreprise au Vieux-Chartres (à l'est de la Chaussairie) nous a permis d'observer le contact, avec ravinement, des argiles éocènes et du Rédonien fossilifère. La surface de ravinement, très irrégulière, entaille profondément une argile blanche, compacte, un peu sableuse, homogène à la partie supérieure, mais renfermant, vers le bas, des rognons d'hématite de plus en plus nombreux et volumineux.

Le Rédonien se présente sous l'aspect d'un falun rappelant le type classique d'Apigné, ou d'une argile de décalcification.

Le falun est très fin, légèrement sableux, en majeure partie formé de coquilles brisées, parfois cimentées en plaquettes. En certains points les fossiles sont entiers et ont gardé leur test nacré.

L'argile de décalcification est sableuse, rougeâtre ou brunâtre, et contient des concrétions d'oxyde de fer où se sont conservés, à l'état de moules, de nombreux petits fossiles rédoniens, surtout abondants vers la partie inférieure.

Le caractère transgressif du Rédonien est nettement indiqué par le ravinement au contact, et l'accumulation à la base de l'argile rouge et des faluns, d'éléments remaniés et roulés d'âges divers :

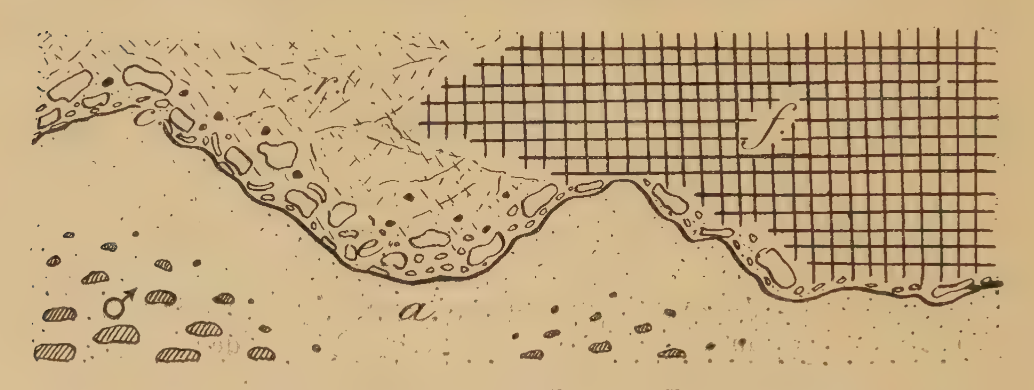
---

(1) F. Kerforne, *Compte rendu des excursions du Laboratoire de Géologie de la Faculté des Sciences de Rennes en* 1918 (*Bull. Soc. Sc. et Médicale de l'Ouest*, 1918, numéro unique, t. 27, p. 8).

1° Petits galets de quartz et de grès, semblant provenir du substratum paléozoïque.

2° Blocs très nombreux, et parfois volumineux de *grès ladères* éocènes.

2° Fossiles helvétiens (côtes d'*Halitherium*, dents de poissons).



Coupe schématique de la fouille (Vieux-Chartres).

Rédonien : f, faluns; *r*, argile de décalcification. — *Éocène : a*, argile blanche; ♂, rognons d'hématite; *c*, contact-ravinement; *e*, éléments remaniés.

Dans cette même région, M. Kerforne (¹) a observé à *La Garenne* le ravinement transgressif des faluns helvétiens par le Rédonien, et a signalé à *Apigné*, des galets de Rupélien à la base du même étage. Les observations que nous avons faites au *Vieux-Chartres* complètent les données antérieures sur les rapports des formations rédoniennes avec leur substratum, en mettant davantage en relief la grande variété des terrains remaniés au cours de cette transgression.

Au sud de Rennes, la mer rédonienne a pu recouvrir indistinctement les affleurements de différentes couches tertiaires, c'est ce que l'on observe au Vieux-Chartres; mais on y voit de plus apparaître sous le revêtement rédonien une formation d'âge éocène dont on ne soupçonnait l'existence qu'à l'état de lambeaux isolés.

L'épaisseur des argiles ferrifères, leur prolongement sous le Rédonien, l'abondance des grès ladères remaniés permettent de supposer que l'Éocène a dû avoir autrefois une grande extension dans cette région; et qu'il a pu être conservé, sous des dépôts plus récents, à l'état de sables, de grès silicifiés, ou d'argiles à minerai de fer.

(¹) F. Kerforne, *Quelques observations sur la mer rédonienne de Bretagne* (*Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 185).

BOTANIQUE. — *Sur le mécanisme de l'orientation des feuilles.* Note de M. Edgar Zaepffel, présentée par M. Gaston Bonnier.

Pendant leur développement, les feuilles pétiolées s'orientent par rapport à la pesanteur, à la lumière, etc., grâce à des courbures et à des torsions de leurs pétioles.

Or on sait que, dans les réactions tropistiques des tiges et des racines, le rôle de l'eau des tissus est particulièrement important. En est-il de même pour les feuilles ? Une répartition convenable de l'eau, dans une feuille, et plus particulièrement dans son pétiole, intervient-elle pendant ses réactions tropistiques ?

Pour étudier ce problème, recherchons les effets d'une richesse plus ou moins grande en eau dans un pétiole, ou dans une portion de pétiole.

Si l'on fend longitudinalement un pétiole en deux portions, l'une supérieure, l'autre inférieure, les portions se courbent légèrement, chacune vers l'extérieur, c'est-à-dire la première vers le haut, la seconde vers le bas. Si l'on place alors le pétiole sectionné dans l'eau, on observe que les courbures s'accroissent notablement, mais d'inégales quantités : la portion inférieure beaucoup plus que la portion supérieure.

Or, dans ces conditions, la richesse en eau a augmenté dans les divers tissus du pétiole. On comprend donc que si, dans un pétiole jeune, encore déformable, la quantité d'eau augmente, des tensions inégales se produisent : la moitié inférieure l'emporte sur la moitié supérieure, et le pétiole se courbe vers le bas, entraînant et abaissant le limbe.

Mais les déformations du pétiole se compliquent ordinairement d'une torsion dont nous allons rechercher l'origine.

Examinons, à cet effet, un pétiole fendu longitudinalement en deux moitiés symétriques, droite et gauche. Pour faciliter l'exposé de ce qui suit, je supposerai que la section intéresse le limbe et la majeure partie du pétiole, sans toutefois atteindre la base de ce dernier. Les deux moitiés s'écartent légèrement l'une de l'autre. Dans l'eau, elles s'écartent beaucoup plus de la même manière, devenant chacune fortement concave vers l'extérieur.

Mais les courbures n'en sont pas planes : elles s'accompagnent d'un gauchissement, en relation avec une torsion de chaque demi-pétiole. Pour chacun d'eux, la région supérieure diverge relativement plus que la région inférieure : une torsion se produit donc. On voit alors les deux moitiés du limbe, entraînées par les deux moitiés de pétiole, s'écarter et pivoter : leurs

faces supérieures s'orientent respectivement vers l'extérieur; leurs faces inférieures se disposent, au contraire, l'une vers l'autre.

Nous avons, jusqu'ici, réalisé une égale hydratation dans les deux moitiés du pétiole. Installons-en, maintenant, une moitié dans l'eau, laissant l'autre moitié dans l'air. La première moitié accroît rapidement sa richesse en eau ; sa turgescence augmente et elle se courbe et se gauchit fortement. L'autre moitié demeure au contraire moins turgescente et ne se courbe que fort peu. Or, rappelons que le pétiole n'a été qu'incomplètement fendu : les deux moitiés demeurent en contact normal par la base. Il est dès lors facile, remettant le tout dans l'air, de rapprocher complètement les deux bords de la section, puis de les maintenir de la sorte par un fil noué, vers l'origine du limbe, autour du pétiole reconstitué.

Dans ces conditions, l'ensemble se courbe et se gauchit sous l'action du demi-pétiole plus riche en eau ; la position d'équilibre est naturellement intermédiaire entre celles que prendrait, isolément, chacune des deux moitiés.

Il résulte de là que, si dans un pétiole normal, intact, non sectionné, la richesse en eau vient à varier d'une façon dissymétrique, des déformations tendent à se produire. Si la quantité d'eau devient, par exemple, plus abondante dans la moitié droite d'un pétiole, le pétiole se courbe vers ce côté droit ; d'autre part, une torsion du pétiole se produit, orientant vers la droite la face supérieure du limbe.

Or, dans le pétiole d'une feuille non étalée dans un plan horizontal, l'amidon mobile détermine une perturbation de la répartition de l'eau [1].

De même, pour une feuille éclairée latéralement, les phénomènes chlorophylliens s'accomplissent avec des intensités inégales dans les deux moitiés du pétiole ; il en doit résulter une répartition dissymétrique de la richesse en eau.

On conçoit alors que les réactions tropistiques des feuilles se réalisent par des courbures et par des torsions du pétiole.

Dans la plupart des feuilles non pétiolées, la base de la nervure principale joue le rôle du pétiole.

---

[1] Voir E. Zaepffel, *L'amidon mobile et le géotropisme* (*Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 442).

BOTANIQUE. — *Sur le gamétophyte des Marchantiées.*
Note de M. **Ch. Douin**, présentée par M. Gaston Bonnier.

Regénération du thalle. — Les hépaticologues ont souvent remarqué que les Marchantiées, abondantes dans la saison qui leur est favorable, sont complètement mortes pendant la saison sèche, ce qui ne les empêche pas, même restées stériles, de reparaître aux mêmes lieux avec le retour de l'humidité. Quelques auteurs vont jusqu'à affirmer que les Marchantiées peuvent revivre après plusieurs années de dessiccation. J'ai vérifié le fait, et voici les résultats de mes expériences et de mes cultures.

Dans les thalles morts, certaines cellules restent vivantes un an, deux ans et plus, probablement, pendant que leurs voisines immédiates ont, depuis longtemps, cessé de vivre. *Les cellules qui restent vivantes et qui seules peuvent régénérer le thalle sont l'initiale terminale du thalle stérile et ses initiales secondaires.* J'appelle ainsi les cellules qui se détachent des quatre faces de l'initiale terminale. On aura encore une idée de l'extraordinaire vitalité de ces initiales par le fait suivant : le *Plagiochasma elongatum* de la zone équatoriale (Mexique) a gelé à Chartres : seules de toute la plante, *les initiales secondaires sont restées vivantes et l'ont régénérée.*

Les initiales secondaires sont espacées comme les écailles ventrales et disposées *sur quatre lignes longitudinales aboutissant à l'initiale terminale : deux rangées superposées sur la ligne médiane et deux autres latérales situées symétriquement par rapport aux précédentes et à la limite externe des insertions des écailles ventrales.*

Anomalies. — Les anomalies des végétaux peuvent nous révéler des faits morphologiques intéressants pour l'étude des formes normales. Je vais en citer quelques exemples :

1° L'anomalie du « double capitule » à l'extrémité d'un seul pédoncule à deux sillons chez le *Reboulia* m'a prouvé que, *dans toute bifurcation, l'initiale terminale du thalle stérile se divise en deux initiales égales et de même valeur que celle dont elles sont issues*, contrairement à l'opinion de tous les hépaticologues qui ont accepté la « *echte Dichotomie* » et la « *falsche Dichotomie* » des auteurs allemands.

2° Les « andræcies partielles » du *Reboulia* et du *Plagiochasma* m'ont appris que les cellules détachées de l'initiale terminale se segmentent *comme des initiales :* de là le nom d'*initiales secondaires* qui leur a été donné ; une

nouvelle compréhension du développement intercalaire est la conséquence de ce fait.

3° Les « pointes saillantes » du thalle du *Reboulia* m'ont indiqué comment se faisait le développement du pédoncule dans les Marchantiées *non sillonnées*.

4° Les singuliers appareils ♀ sessiles sur le thalle stérile du *Plagiochasma elongatum* m'ont permis de formuler les principes relatifs à la soudure de deux organes à développement basilaire.

Développement du thalle. — Le thalle des Marchantiées comprend deux parties : la partie solide ou thalle proprement dit qui correspond à la tige des Muscinées et a, comme cette dernière, un développement terminal; les organes latéraux (chambres aérifères et écailles) sont l'équivalent des feuilles et dont le développement est basilaire.

Le développement terminal du thalle proprement dit se décompose en deux temps : dans le premier, l'initiale terminale se segmente et donne les initiales secondaires; dans le second, ce sont celles-ci qui fonctionnent à leur tour:

1° L'initiale terminale se segmente *à droite et à gauche d'abord, en dessous et en dessus ensuite;* on a ainsi quatre cellules formant *une série de segmentations*. L'initiale terminale continue à se segmenter, *toujours dans le même ordre*, pour ainsi dire indéfiniment, en donnant d'autres séries d'initiales secondaires.

2° Chaque initiale secondaire se segmente sur trois, plus rarement sur quatre faces, pour donner autant de *cellules primaires* (segmentation primaire) qui se multiplient plus ou moins (multiplication secondaire ou *développement intercalaire*), en formant une masse de cellules que j'appelle un *mérophyte*. Tous les mérophytes ainsi obtenus grandissent solidairement et forment le thalle stérile. Arrivés à leur état définitif, ils se fixent au support par leurs poils absorbants. On a, de cette façon, un ensemble de mérophytes adultes, fixés au sol et désormais immuables, et un certain nombre d'autres en voie d'accroissement qui, par ce fait même, repoussent en avant l'initiale terminale et les mérophytes voisins.

Le thalle stérile se compose ainsi de 4 séries longitudinales de mérophytes intimement soudés : 2 séries médianes superposées qui composent la *nervure* et 2 séries latérales qui forment les *ailes*, termes qui se trouvent ainsi nettement précisés, quant à leur origine, pour la première fois.

Les initiales secondaires ont un triple rôle : outre leur fonction normale

qui est de former les mérophytes, elles donnent encore *les initiales basilaires* d'où sont issus les organes latéraux et *des initiales terminales*, qui, dans certains cas, donnent naissance aux appareils ♂ et ♀ pédonculés et aux pousses de régénération.

Le développement basilaire des organes latéraux se produit de la manière suivante :

Une initiale basilaire qui fonctionne fait saillie hors du thalle ou de la tige par une sorte de bourgeonnement, et la plus grande partie de la saillie s'isole du reste par une cloison transversale. La cellule externe est la première cellule de l'organe à former, tandis que la cellule interne est l'initiale qui continue à faire saillie au dehors et à s'isoler de la partie proéminente par une cloison transversale; etc. Inutile de dire que les organes latéraux sont presque toujours formés de plusieurs initiales basilaires soudées qui fonctionnent solidairement et souvent pendant longtemps, en donnant *de nombreuses séries, segmentations qui sont réduites chacune à une seule cellule*.

En résumé, dans le développement terminal, les tissus nouvellement formés *repoussent en avant l'initiale terminale et les mérophytes voisins*, tandis que, dans le développement basilaire, *ce sont les initiales basilaires qui restent fixes* sur le thalle ou la tige, pendant que les tissus jeunes repoussent les plus âgés à l'extérieur.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur la toxicité de divers phénols nitrés pour le* Sterigmatocystis nigra. Note de M. L. **Plantefol**, présentée par M. J. Costantin.

La toxicité des phénols est consacrée depuis longtemps par le rôle qu'ils jouent comme antiseptiques. Parmi les phénols les plus simples, l'acide phénique et son dérivé trinitré, l'acide picrique, ont été particulièrement employés. Mais, malgré les travaux de Koch et de Hoppe-Seyler, les données numériques relatives à la toxicité du phénol et des phénols nitrés sont encore fragmentaires.

J'ai étudié comparativement les actions que présentent, sur la germination et la croissance du *Sterigmatocystis nigra*, le phénol et quelques-uns de ses dérivés nitrés (mononitrophénols : ortho, méta et para; dinitrophénol 1, 2, 4; trinitrophénol, 1, 2, 4, 6).

Le milieu nutritif est constitué par 100$^{cm^3}$ de la formule de Raulin, où le saccha-

rose est remplacé par du glucose. On y ajoute le produit à essayer, soit à l'état cristallisé, soit en solution dans l'eau distillée, et l'on porte par addition d'eau distillée, au volume total de 120^{cm^3}. Les vases de culture sont des cristallisoirs cylindriques de 8^{cm} de diamètre et $4^{cm},5$ de profondeur. Les spores du champignon sont ensemencées au pinceau, suivant la technique indiquée par Raulin. Le développement a lieu à 35°. La tension de l'atmosphère en vapeur d'eau est maintenue constante à l'aide d'un dispositif rappelant celui qu'utilisait Raulin. Pour les produits relativement volatils à la température de culture (phénol), ou facilement entraînables par la vapeur d'eau (*o*-nitrophénol), des expériences de contrôle sont faites en atmosphère confinée. Enfin l'examen de préparations microscopiques permet de suivre le début de la germination.

Chaque expérience comporte une culture témoin et une série de cultures, de concentrations croissantes en produit toxique, évaluées en grammes par litre. Pour le *o*-nitrophénol, peu soluble dans l'eau, les recherches ont été poussées jusqu'à saturation du liquide nutritif par le phénol ($0^g,4$ par litre).

Parmi les résultats expérimentaux, je retiendrai trois sortes de tests de la toxicité :

1. *Concentration minima empêchant la germination* (*concentration antigerminative inhibitrice*). — A cette concentration, la spore se gonfle beaucoup plus qu'une spore qui germe ; mais l'augmentation de la turgescence n'est pas suivie de la poussée d'un tube mycélien :

	Phénol.	*o*-nitro-phénol.	*m*-nitro-phénol.	*p*-nitro-phénol.	Dinitro-phénol.	Trinitro-phénol.
Pas de germination.......	0,8	>0,4	0,3	0,12	0,009	0,4
Germination..............	0,7	>0,4	0,2	0,1	0,008	0,35

La concentration antigerminative n'est pas atteinte pour le *o*-nitrophénol dissous à saturation dans le liquide nutritif.

2. *Concentration maxima* permettant le *développement des conidies* et leur noircissement, au bout de temps donnés, à partir de l'ensemencement :

	Temps.	Phénol.	*o*-nitro-phénol.	*m*-nitro-phénol.	*p*-nitro-phénol.	Dinitro-phénol.	Trinitro-phénol.
Début du noircissement...	40 heures	0,1	0,05	0,05	0,01	0,001	0,03
Cultures noires.	3 jours	0,4	0,4	0,1	0,02	0,004	0,1
	4 jours	0,5	"	"	0,05	0,005	0,15

3. *Poids sec du champignon*, prélevé au bout de 5 jours de culture :

Concentration en grammes par litre.	Poids sec du champignon. Phénol.	o-nitro-phénol.	m-nitro-phénol.	p-nitro-phénol.	Dinitro-phénol.	Trinitro-phénol.
0........	1,64	1,67	1,67	1,61	1,67	1,64
0,004.....	"	"	"	"	1,57	"
0,007.....	"	"	"	"	0,07	"
0,01......	"	"	"	1,57	"	1,54
0,02......	"	"	1,66	1,48	"	1,37
0,05......	"	1,65	1,49	0,99	"	1,20
0,1.......	1,60	1,70	1,25	0,09	"	0,79
0,2.......	1,66	1,60	0,67	"	"	0,62
0,3.......	"	1,55	"	"	"	0,32
0,4.......	1,63	1,20	"	"	"	"
0,5.......	1,35	"	"	"	"	"
0,6.......	0,74	"	.	"	"	"

Ces résultats mettent en évidence un ensemble de faits :

1° Le phénol et les produits nitrés qui en dérivent, sont toxiques pour le *Sterigmatocystis nigra*, les produits nitrés étant plus toxiques que le phénol.

2° Les trois mononitrophénols ont des toxicités différentes : l'ortho est le moins toxique, le para, le plus toxique. Ainsi semblent s'opposer, par leurs propriétés pharmacodynamiques, les deux mononitrophénols que leurs propriétés chimiques rapprochent le plus.

3° Le seul des dinitrophénols qui ait été utilisé dans cette étude montre une toxicité beaucoup plus élevée que le phénol et les mononitrophénols : il est près de cent fois plus toxique que le phénol, et plus de dix fois plus toxique que le plus actif des mononitrophénols.

4. Le seul des trinitrophénols qui ait été utilisé dans cette étude présente une toxicité plus grande que celle du phénol, et de même ordre que celle des mononitrophénols. L'allure toute différente de la courbe des poids secs, en fonction de la concentration, traduit une différence dans l'action pharmacodynamique.

5. Il est extrêmement curieux de rapprocher les actions du dinitrophénol 1, 2, 4, et du trinitrophénol 1, 2, 4, 6. Tous deux ont également un groupement NO^2 en position para et un autre en ortho. D'une manière théorique, on passe du dinitrophénol au trinitrophénol par fixation d'un nouveau groupement NO^2 en position 6, c'est-à-dire en ortho. L'introduction de ce groupement diminue considérablement la toxicité. Comme il

rend la molécule symétrique, il y a lieu de rapprocher ce fait de constatations antérieures [1].

6. Parmi les six corps étudiés jusqu'ici, le dinitrophénol 1, 2, 4 paraît, du point de vue toxique, jouir de propriétés particulières, par comparaison avec la série chimique à laquelle il appartient. A cette toxicité correspondent des propriétés physiologiques spéciales.

CYTOLOGIE. — *Sur le polymorphisme et la maturation des spores des Syndinides* (*Péridiniens*). Note [2] de M. **Édouard Chatton**.

Les Syndinides forment une famille de Péridiniens caractérisés par leur parasitisme, leur complète dépigmentation, leur état plasmodial, la structure de leurs noyaux, qui, dans la cinèse, présentent d'une manière constante cinq chromosomes en V, et enfin par leurs spores gymnodiniennes plus ou moins turbinées.

On les trouve dans la cavité générale des copépodes pélagiques, et dans la capsule centrale de certains radiolaires (*Thalassicolla*). Il ne sera question ici que des premiers. J'ai fait connaître antérieurement [3] les phases de leur évolution, la structure de leur plasmode, le processus cinétique propre à leurs noyaux, et la morphologie de leurs spores.

Chez une même espèce de copépodes il peut se former jusqu'à trois catégories de spores tout à fait différentes. Cela ne se produit jamais, toutefois, chez un même individu, c'est-à-dire à partir d'un même plasmode.

Chez *Paracalanus parvus* j'ai distingué des « spores à rostre », des « macrospores » et des « microspores », chacune des deux dernières catégories présentant elle-même des variantes secondaires. Mais chez d'autres copépodes (*Corycœus venustus*), il ne se forme qu'un seul type de spores.

J'ai posé la question, dans ma monographie, de la signification de ce polymorphisme sporal. Pluralité des espèces, différenciation sexuelle, polymorphisme non sexuel dans une même espèce, telles sont les trois hypothèses envisagées. De nouvelles recherches me permettent d'éluder la troisième. Chaque forme sporale correspond en effet à un plasmode de

---

(1) Mayer, Magne et Plantefol, *Sur la toxicité des carbonates et chlorocarbonates de méthyle chlorés* (*Comptes rendus*, t. **172**, 1921, p. 136).

(2) Séance du 27 décembre 1921.

(3) *Comptes rendus*, t. **150**, 1910, p. 654-656; t. **170**, 1920, p. 413-415; t. **173**, 1921, p. 859-861.

structure bien caractérisée. La formation d'une seule catégorie de spores par les plasmodes du *Corycœus venustus* plaide aussi contre cette hypothèse, et même contre celle de la différenciation sexuelle.

Toutes les recherches en vue de vérifier cette dernière ont été négatives. J'ai mélangé nombre de fois des spores de différentes catégories issues des *Paracalanus*, en effectuant avec elles toutes les combinaisons possibles, sans jamais observer de copulations. Je n'ai jamais constaté non plus de copulations entre spores identiques, soit issues d'un même plasmode, soit issues de plasmodes différents. Toujours ces spores ont dégénéré purement et simplement, entre 24 et 48 heures. Chez *S. corycœi*, dont le cas est particulièrement instructif, les spores, après quelques heures de vie libre, se fixent sur la dépouille du copépode, ou au verre, et y passent à l'état quiescent. On peut les conserver plusieurs jours sous cette forme.

L'étude cytologique de la phase de maturation des spores de toutes catégories montre au surplus qu'elles ne sont point le siège de phénomènes de réduction, comme elles devraient en présenter si elles étaient des gamètes.

L'hypothèse qui subsiste donc est celle de la pluralité des espèces. Il convient dès lors de caractériser celles-ci, à la fois par leurs plasmodes et par leurs spores. Au cours de l'étude cytologique qui a été nécessaire pour ce faire, j'ai porté spécialement mon attention sur les phénomènes qui accompagnent la sporulation. Chez *Syndinium rostratum* (« spores à rostre » de *Paracalanus parvus*) la formation d'un appareil cinéto-flagellaire au pôle du demi-fuseau, constitué par un rhizoplaste ayant la valeur d'une centrodesmose et perdant secondairement toute connexion avec le noyau, la dissociation de la figure fusoriale en cinq chromosomes à individualité persistante, pelotonnés dans la vésicule nucléaire; chez *S. corycœi* (de *Corycœus venustus*), la réduction de l'appareil centrosomien flagellaire à un cône coiffant le noyau, la dislocation des chromosomes aboutissant dans la spore mûre et quiescente, sessile, à la constitution d'un noyau granuleux, condensé, enveloppé d'une forte membrane; chez *S. turbo* (« macrospores » de *Paracalanus parvus*) une structure et une évolution analogues, quoiqueici les spores restent mobiles; chez *S. minutum* (« microspores » de *Paracalanus parvus*), la persistance de deux demi-fuseaux dans les spores mûres.

D'une manière plus générale nous dégageons de cette étude les conclusions suivantes :

1° L'organisation et le mode de division nucléaires des *Syndinium* pré-

sente d'une espèce à l'autre une uniformité remarquable. Chez toutes, les chromosomes sont constamment au nombre de cinq, toujours courbés en V.

2° A la prophase et à la télophase mitotiques, comme en intercinèse, ces chromosomes sont toujours agencés en demi-fuseaux, qui n'ont pas ici de signification spéciale, comme dans le cas des ciliés où ils paraissent avoir la valeur d'un synapsis.

3° Quelle que soit la structure du noyau dans les spores mûres, c'est toujours à partir de ce stade en demi-fuseau qu'elle s'établit.

4° La maturation des spores n'est point accompagnée de méiose. Ceci, joint à leur évolution solitaire, interdit de les regarder comme des gamètes. Les véritables gamètes des *Syndinium* sont encore à découvrir.

5° A l'uniformité structurale relative des plasmodes s'oppose une grande diversité morphologique et cytologique dans les spores. Cette constatation est embarrassante, car si l'on considère, comme les faits nous l'imposent en général, et particulièrement dans le cas des Péridiniens parasites, la forme sporale comme originelle, on ne conçoit pas que des types sporaux aussi divers soient issus de stades végétatifs aussi semblables, jusqu'aux détails de constitution nucléaire.

5° L'appareil cinétoflagellaire des Dinoflagellés, jusqu'ici peu connu, se présente, selon la règle fondamentale pour les autres flagellés, comme un dérivé de l'appareil centrosomien nucléaire.

MÉDECINE EXPÉRIMENTALE. — *Emploi du bismuth dans la prophylaxie de la syphilis.* Note [1] de MM. **R. Sazerac** et **C. Levaditi**, présentée par M. Roux.

Après avoir établi les propriétés curatives du bismuth dans la syphilis [2], nous avons recherché, avec M. Issaïcu, si les dérivés bismuthiques agissaient préventivement. Convaincus de l'importance du problème au point de vue de la prophylaxie de la syphilis, nous l'avons étudié expérimentalement sur le lapin, en utilisant les deux techniques que voici :

a. Nous avons administré les produits dont nous désirons connaître l'action prophylactique, à des lapins, auxquels nous inoculions le tréponème (*virus neurotrope*) par scarification préputiale (Metchnikoff et Roux).

---

[1] Séance du 3 janvier 1922.

[2] Sazerac et Levaditi, *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1391.

b. En outre, nous avons essayé de nous rapprocher le plus possible des conditions qui président à la transmission de la syphilis chez l'homme, en faisant agir l'agent prophylactique sur des lapins soumis à la contamination par contact sexuel, sans nulle lésion préalable.

I. *Méthode des scarifications.* — Des lapins mâles étaient infectés par scarifications préputiales abondantes; l'infection massive était de beaucoup supérieure à celle qui assure la contamination humaine. Nous nous sommes servis du *tartrobismuthate de sodium et de potassium* et aussi du *lactate de bismuth* soluble (en solution aqueuse). Le mode d'application a varié. *Persuadés que la prophylaxie de la syphilis pourrait être réalisée par simple ingestion d'un médicament spirillicide, nous avons utilisé le bismuth, non seulement en application locale, mais aussi par la voie digestive* (buccale et anale).

1. Injections préventives. — Lorsqu'on injecte dans le muscle du lapin $0^g,05$ de tartrobismuthate par kilogramme, *trois heures* après l'infection préputiale, on empêche définitivement l'apparition des lésions tréponémiques (absence de spirochètes le 60ᵉ et le 63ᵉ jour chez les animaux traités, lésions chez le témoin déjà le 16ᵉ jour).

Le tartrobismuthate, administré en injection intra-musculaire, agit préventivement.

2. Voie digestive. — A. *Voie buccale.* — Le lactate de bismuth, administré au lapin par la bouche, paraît être absorbé [action curative *per os* constatée par Sazerac et Levaditi [1]]. Cette absorption par la voie digestive semble cependant faible. C'est ce qui explique probablement les résultats imparfaits fournis par nos essais préventifs. Nous n'avons, en effet, observé que des retards, parfois considérables, dans l'éclosion des lésions et jamais d'empêchement définitif. Nos expériences sont au nombre de 15, dont 12 avec le tartrobismuthate de Na et K, et 3 avec le lactate. Le premier de ces sels a été administré par la bouche à la dose de 20^{cm^3} à 40^{cm^3}, solution, bouillie ou suspension huileuse à 10 ou 20 pour 100, 1 *heure*, 3 *heures*, 4 *heures* et 24 *heures* après l'infection. *Sur* 12 *essais*, 7 *ont été complètement négatifs et* 5 *ont montré un retard de l'infection, qui a été de* 14, 17, 18 *et* 21 *jours, par rapport aux témoins.* Avec le *lactate* (mêmes doses), sur trois expériences, une seule a montré un retard de 45 jours. Dans l'ensemble, le *traitement préventif* per os *a retardé l'apparition des tréponèmes dans une proportion de* 40 *pour* 100 *des cas.*

Il y a donc lieu de conclure que, *malgré l'absence d'action préventive définitive, certains sels bismuthiques ne sont pas totalement inactifs au point de vue prophylactique, lorsqu'on les administre* per os.

---

[1] Sazerac et Levaditi, *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 1201.

B. *Voie anale.* — La voie anale se prête mieux que la voie buccale à essais. En effet, un lapin qui a reçu par le rectum 20^{cm^3} de bouillie de tartrobismuthate à 20 pour 100 n'a pas montré de tréponèmes 76 jours après l'inoculation, tandis que le témoin s'est infecté le 20e jour.

3. Application locale. — Nous nous sommes servis de la *pommade* au tartrobismuthate (sel 30^g, vaseline, lanoline, ââ 30^g) et de la *poudre* du même sel.

a. Pommade. — Six expériences, dans lesquelles la pommade a été appliquée par frottement sur la région infectée, 1 heure, 4 heures et 24 heures après la scarification. *Quatre fois*, la pommade a empêché définitivement l'apparition des lésions spirochétiennes (50, 76, 93 et 94 jours d'observation), tandis que les témoins se sont infectés le 20e et le 22e jour. Une expérience fut négative, tandis que, dans une autre, il y eut un retard de 11 jours. *Les lapins qui ont été préservés par la pommade se sont montrés sensibles lors d'une inoculation ultérieure faite le 99e jour.*

Ces essais montrent que *la pommade bismuthique agit préventivement, même lorsqu'elle est appliquée de 1 heure à 4 heures après une infection massive* [1].

b. Poudre. — La poudre de tartrobismuthate, employée localement 3 heures après l'inoculation, n'a empêché l'infection que dans une expérience sur trois. Elle agit donc moins bien que la pommade, étant moins adhérente et aussi moins pénétrante.

II. *Méthode des accouplements.* — Cinq couples ont été constitués, un seul des générateurs étant infecté aux organes génitaux (lésions anciennes, riches en tréponèmes), et l'autre normal (2 mâles infectés, 3 femelles infectées). D'après les expériences de Levaditi, Marie et Issaïcu [2], l'infection se transmet ainsi dans la grande majorité des cas. Les animaux sont restés en contact durant 5 jours. Pendant les quatre premiers jours, nous avons appliqué, par frottement, la pommade bismuthique au niveau des organes génitaux du procréateur normal.

Résultat. — Trois de ces couples ont été féconds, ce qui prouve qu'il y eut accouplement au moins dans trois de nos expériences. Or, chez aucun des cinq pancréateurs normaux (3 mâles et 2 femelles), nous n'avons constaté de lésions tréponémiques, pendant les 82 jours d'observation.

La pommade bismuthique agit préventivement chez des animaux exposés à une infection certaine, par la voie de l'accouplement sexuel.

Conclusions. — Le tartrobismuthate de Na et de K jouit de propriétés préventives, lorsqu'il est appliqué sous forme de pommade sur la région infectée, de 1 heure à 4 heures après l'infection; il empêche la maladie chez

---

(1) La pommade se montre inactive lorsqu'elle est appliquée pendant la période d'incubation : 5e, 10e et 15e jour.

(2) Levaditi, Marie et Issaïcu, *C. R. de la Soc. de Biol.*, t. 85, 1921, p. 342.

les animaux exposés à la contamination par contact sexuel; il agit préventivement, lorsqu'on l'injecte à petites doses dans le muscle. Ce sel, ainsi que le lactate de bismuth, administrés par la bouche, retardent manifestement l'éclosion de lésions spirochétiennes.

A 16 heures trois quarts, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 18 heures.

É. P.

ERRATA.

—

(Séance du 19 décembre 1921.)

Note de MM. *G. Friedel* et *L. Royer*, Sur les mélanges de liquides anisotropes et l'identité des liquides stratifiés de Grandjean avec les liquides du type azoxyphénétol :

Page 1320, ligne 22, *au lieu de* gauche, *lire* droit; *au lieu de* droit, lire *gauche*.

(Séance du 27 décembre 1921.)

Note de M. *Kilian*, Sur un problème de la tectonique des chaînes subalpines dauphinoises :

Page 1437, ligne 9, *au lieu de* situés à l'est, *lire* situés à l'ouest.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans les séances de décembre 1921 (*suite et fin*).

Le Toarcien supérieur dans la région sud-est de l'Aveyron, par J. Monestier. Extrait du *Bulletin de la Société géologique de France*, t. XX; 1 fasc. 24^{cm}.

Calcolo del titolo più economico di un gas misto di gas ricco e povero, par C. Canovetti. Extrait de l'*Industria del Gas e degli Acquedotti*, de septembre 1921; 1 fasc. 23^{cm}. (Présenté par M. Lallemand.)

Le turbine a gas motrici a propulsione, par C. Canovetti. Extrait de l'*Industria del Gas e degli Acquedotti*, de septembre 1921; 1 fasc. 23^{cm}. (Présenté par M. Lallemand.)

Recherches sur le mouvement des petites planètes, par H.-V. Zeipel. Extrait de *K. Svenska Vet. Akad : s Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, Bd. 11, 12, 13; 1 vol. 21^{cm}.

L'œuvre astronomique d'Henri Poincaré, par H.-V. Zeipel. Extrait des *Acta mathematica*, t. 38; 1 fasc. 30^{cm}.

De la lumière au son ..., par P. Vivier. Paris, Mendel, 1921; 1 vol. 25^{cm}.

Nouveaux principes d'hydraulique générale et de mécanique, d'après une étude nouvelle de la contraction, par E.-E. Marchand Bey. Chez l'auteur, à Livry-sur-Seine (Seine-et-Marne), 1921; 1 vol. 25^{cm}.

La loi de Newton est la loi unique. Théorie mécanique de l'Univers, par Max Franck. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921; 1 vol. 25^{cm}.

La Physique théorique nouvelle, par Julien Pacotte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921; 1 vol. 24^{cm}.

Analogies mécaniques de l'électricité, par J.-B. Pomey. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921; 1 vol. 24^{cm}.